

Ray W. Clough Joseph Penzien

Dynamics of Structures

McGRAW-HILL BOOK COMPANY New-York

Р. Клаф Дж. Пензиен

Динамика сооружений

**Перевод с английского
Л. Ш. Килимника, А. В. Швецовой**

Москва Стройиздат 1979

Научный редактор Г. А. Казина

Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений: Пер. с англ. — М.: Стройиздат, 1979. — 320 с. — Перевод изд.: Dynamics of Structures/Ray W. Clough, Joseph Penzien. — New York, 1975.

Книга посвящена вопросам динамики сооружений и связанным с ними проблемам расчета зданий и сооружений на сейсмические воздействия. Рассматриваются свободные и вынужденные колебания систем с одной и многими степенями свободы при разных видах динамических и сейсмических нагрузок. Приводятся результаты исследований по анализу сейсмостойкости сооружений. Даны решения задач по динамическому расчету конструкций и сооружений. Большое внимание уделено вопросам численного анализа уравнений колебаний.

Предназначена для проектировщиков и научных работников, занимающихся вопросами расчета зданий и сооружений при динамических и сейсмических нагрузках. Она может быть также полезна студентам вузов при изучении курсов динамики сооружений и сейсмостойкого строительства.

Табл. 3, ил. 150.

Р. КЛАФ, ДЖ. ПЕНЗИЕН

ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ

Редакция переводных изданий

Зав. редакцией М. В. Перевалюк

Редактор М. Н. Кузнецова

Мл. редактор Л. Н. Буравлева

Внешнее оформление художника И. А. Ширяева

Технический редактор В. Д. Павлова

Корректор Г. Г. Морозовская

ИБ № 1961

Сдано в набор 26.12.78 Подписано к печати 17.07.79
Формат 60×90^{1/16}. Бумага тип. № 1. Гарнитура «Литературная». Печать высокая.
Печ. л. 20,0 Уч.-изд. л. 19,74 Тираж 5000 экз. Изд. № AVIII-7297 Зак. № 794
Цена 1 р. 70 к.

Стройиздат, 103006, Москва, Каляевская, 23а

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
Москва 129041, Б. Переяславская ул., 46

К 30205-525 БЗ-15-8-79. 2105000000
047(01)-79

© 1975 by Mc Graw-Hill, Inc.

© Перевод на русский язык,
Стройиздат, 1979

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Авторы этой книги, проф. Р. В. Клаф и проф. Дж. Пензиен, известные специалисты США по инженерной сейсмологии и сейсмостойкости сооружений. Особенно широкую популярность завоевали их исследования в области развития и применения к задачам сейсмостойкости методов математической статистики, метода конечных элементов и др. Данная публикация является частичным переводом на русский язык одной из последних работ проф. Р. В. Клафа и проф. Дж. Пензиена по динамике и сейсмостойкости сооружений, написанной по материалам курса лекций в Калифорнийском университете в Беркли, где оба автора в разное время были директорами Центра исследований по сейсмостойкости сооружений.

В английском оригинале книги примерно в равной степени рассматриваются два подхода к оценке динамических реакций упругих и неупругих систем: первый — на основе детерминистских принципов, второй — стохастический. В данном переводе приведены материалы книги по первой проблеме.

В США книга представляет собой первую часть курса для студентов и аспирантов, изучающих сейсмостойкость сооружений, ее основной объем (15 первых глав) посвящен тем вопросам динамики сооружений, которые находят наиболее частое применение при решении задач сейсмостойкости и являются базой развития ее основных расчетных положений. В то же время примерно четвертая часть книги (ее последние две главы) посвящена непосредственно вопросам сейсмостойкости, представленным с тесной увязкой с первыми 15 главами книги. Книга написана с учетом современных достижений динамики и сейсмостойкости сооружений. В ней рассмотрены не только колебания упругих систем, но в равной мере отражены и колебания неупругих систем, особенно важные для анализа сейсмостойкости сооружений. Исследования в направлении изучения последних в настоящее время интенсивно развиваются как в нашей стране, так и за рубежом.

Ряд разделов книги представляет интерес для инженеров-проектировщиков, работа которых связана с динамикой и сейсмостойкостью сооружений, а также для аспирантов и преподавателей высших учебных заведений.

Четкость изложения, хорошо подобранные иллюстрации и примеры расчетов делают книгу хорошим учебным пособием для студентов вузов и доступной для самостоятельного изучения предмета.

Эта книга входит в серию публикаций ведущих зарубежных авторов, которая создается в настоящее время Стройиздатом, по вопросам инженерной сейсмологии и сейсмостойкости сооружений и, несомненно, окажется полезной для советских читателей.

Профессор С. В. Поляков

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга представляет собой курс по динамике сооружений, разработка которого велась в течение 25 лет в Калифорнийском университете, Беркли. Безусловно, со временем материал подвергался существенной переработке. Три различных раздела были подготовлены в разное время, а отдельные части представленного материала использовались в качестве курсов лекций в учебных заведениях других стран, например в Тронхейме (Норвегия) и Токио (Япония).

Первоначальное изложение этого материала, которое выполнено проф. Р. Клафом, во многом определялось лекциями проф. Р. Л. Бисплинхоффа в Массачусетском технологическом институте и его вкладом в курс динамики самолета. Последующая переработка текста применительно к задачам динамики строительных конструкций проводилась под влиянием пионерной работы К. Хохенемзера и В. Прагера.

Проф. Дж. Пензиен также отмечает неоценимую пользу, полученную им от лекций проф. С. Х. Кренделла по случайным колебаниям в Массачусетском технологическом институте. В процессе постоянной переработки материала Р. Клаф и Дж. Пензиен внесли свой вклад в развитие проблемы. В соответствующие разделы курса лекций включены публикации многих авторов. Вклад большинства из них в развитие динамики сооружений настолько общепризнан, что не требует дополнительной оценки. Поэтому в книге дается небольшое число ссылок, и авторы приносят свои извинения специалистам, чьи работы не упомянуты.

Хотя содержание книги подвергалось непрерывной переработке в период ее подготовки, общая структура оставалась неизменной. Логический переход от конструкций с одной степенью свободы к обобщенным системам с одной степенью и к анализу сложения форм колебаний для конструкций со многими дискретными степенями свободы позволяет инженеру-строителю, знакомому с вопросами статике сооружений, понять специфику задач, связанных с динамическим характером нагружения сооружений. Кроме того, признано целесообразным основное внимание уделять вопросам анализа переходного процесса реакции, не ограничиваясь анализом частот и форм собственных колебаний. Необходимой основой для изучения динамики сооружений являются прочные знания теории статического расчета, включая матричные методы, и авторы полагают, что читатели данной книги имеют соответствующую подготовку.

Пожалуй, наиболее существенные и важные изменения в процессе написания этой книги связаны с широким использованием быстродействующих ЭЦВМ при анализе работы конструкций. До широкого применения ЭВМ в строительной практике основные разработки в области динамики сооружений были ориентированы на эффективные методы расчета с помощью логарифмической линейки и настольных вычислительных машин. Эти методы все еще занимают значительное место в этой книге, так как авторы убеждены в их полезности при изучении рассматриваемой проблемы. Если хорошо понятны тонкости методов обычного счета, то нетрудно составить и использовать соответствующую программу для ЭВМ, однако без знания всех деталей расчета невозможно эффективное применение программ расчета на ЭВМ как универсального «черного ящика». Тем не менее хорошо известно, что любой динамический анализ в практике расчетов требует большого объема вычислений, который может быть выполнен с удовлетворительными затратами времени только с помощью ЭВМ. Поэтому в данной книге рассматриваются такие методы решения задач, которые можно эффективно использовать как с помощью быстродействующих ЭВМ, так и обычным способом. Цель книги заключается в объяснении существа методов, а методика составления программ и вопросы эффективного использования ЭВМ не рассматриваются.

Изложены также вопросы расчета зданий и сооружений на сейсмические воздействия и иллюстрируется применение теоретических подходов при решении практических задач сейсмостойкого строительства.

Содержание книги составляет основу цикла лекций на старшем курсе Калифорнийского университета. Кроме того, книга может быть использована как справочное пособие по проектированию конструкций при динамических и сейсмических нагрузках. Хотя большая часть изложенного материала относится к области гражданского строительства, те же основные методы динамики сооружений применимы в космической технике, кораблестроении, автоматике и в любой другой области, где элементы конструкций испытывают динамические нагрузки.

В работу включено большое число примеров, так как авторы убедились в том, что с их помощью материал усваивается наиболее эффективно.

Таким образом, монография охватывает гораздо больший круг проблем, чем можно изложить в одногодичном цикле лекций по динамике сооружений.

Рэй В. Клаф
Джозеф Пензиен

ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a — расстояние
 a_0, a_n — коэффициенты Фурье
 A — площадь
 A_1, A_2 — постоянные
 b — постоянная
 b_0, b_n — коэффициенты Фурье
 B — постоянная
 c — коэффициент затухания
 c^* — обобщенный коэффициент затухания
 c_c — коэффициент критического затухания
 c_n — коэффициенты Фурье
 c_{ij} — коэффициенты влияния затухания
 c_n — обобщенные коэффициенты затухания для главных форм колебаний
 D — коэффициент динамический, жесткость пластины
 D — динамическая матрица, равная $k^{-1} m$
 D_1, D_2 — постоянные
 e — осевое перемещение
 E — модуль Юнга
 E — динамическая матрица, равная D^{-1}
 EI — жесткость при изгибе
 f — круговая частота собственных колебаний
 \tilde{f}_{ij} — коэффициенты влияния податливости
 f_1, f_D, f_S — соответственно инерционные, диссипативные и упругие силы
 g — ускорение силы тяжести
 g_i — обобщенные координаты перемещений, волновые функции напряжений
 G — модуль сдвига
 G_1, G_2, G_3 — постоянные
 h — толщина плиты, высота этажа
 $h(t)$ — импульсная переходная функция
 $H(\omega), H(i\omega)$ — комплексная частотная характеристика
 i — целое число
 I — импульс, момент инерции
 I — единичная матрица
 j — целое число
 k, k_i — жесткости пружин
 k^*, k^* — обобщенные жесткости пружин
 $\tilde{k}(t)$ — эффективная жесткость
 k — динамическая жесткость
 k_G — жесткость, определяемая геометрией системы
 k_{ij} — коэффициенты влияния параметров жесткости
 \tilde{k}_{ij} — коэффициенты влияния связанных параметров жесткости
 $k_{G_{ij}}$ — коэффициенты влияния жесткостей, определяемых геометрией системы
 K_n — обобщенная жесткость по n -й форме колебаний
 L — длина
 \mathcal{L} — коэффициент сейсмического воздействия
 m — масса, целое число
 m_i — масса
 m_{ij} — коэффициенты влияния масс

- \bar{m} — равномерно распределенная масса (на единицу длины)
 \bar{m}_I — момент инерции поворота масс
 M_n — обобщенная масса по n -й форме колебаний
 m^* — обобщенная масса
 M — момент
 $\mathcal{M}, \mathcal{M}_i$ — момент сопротивления сечения
 n — целое число, постоянная
 N — осевая нагрузка, число временных интервалов, число степеней свободы
 N_{cr} — критическая продольная сила
 N — осевая нагрузка, переменная во времени
 p, p_n — нагрузка
 p — погонная нагрузка
 p^* — обобщенная нагрузка
 p^{eff} — эффективная нагрузка
 $P_n(t)$ — функция возмущения по n -й форме колебаний
 q_i — обобщенная координата i
 Q_i — i -тая обобщенная функция возмущения
 r — радиус инерции
 $R(t)$ — относительный параметр реакции
 s — постоянная
 $S_{xy}(\omega), S_x(\omega)$ — функции спектральной плотности
 S_a — спектр реакции ускорения
 S_d — спектр реакции перемещения
 S_v — спектр реакции псевдоскорости
 SI — интенсивность спектра реакции
 t, t_i — время
 t_1 — продолжительность импульса
 t_{ij} — коэффициенты влияния передаточной функции
 T — период колебаний, кинетическая энергия
 T_n — период колебаний по n -й форме
 T_p — период нагружения
 u — перемещение в направлении x
 U — энергия деформации
 v — перемещение в направлении y
 v^f — общее перемещение
 v_g, v_{go} — перемещение грунта
 v_{st} — статическое перемещение
 V, V_f, V_n — потенциальная энергия
 \mathcal{P} — сдвигающая сила в сечении
 w — перемещение в направлении z
 W — работа, вес
 W_{nc} — работа неконсервативных сил
 W_N — работа осевой нагрузки N
 x — координата
 $x(t)$ — случайный процесс
 y — координата
 $y(t)$ — случайный процесс
 Y_n — обобщенное перемещение по n -й главной форме колебаний
 z — координата
 Z, Z_n, Z_0 — обобщенные координаты
 β — отношение частот
 γ — нагрузка на единицу площади
 δ — логарифмический декремент, вариация, остаточный
 Δ — приращение
 Δ_{st} — статическое перемещение
 ε — деформация

- ζ — функция времени, коэффициент затухания гистерезисного типа
 λ_G — коэффициент осевой нагрузки
 λ_i — множитель Лагранжа
 λ_n — n -е собственное значение
 θ — фазовый угол, наклон, поворот
 μ — коэффициент податливости
 ν — коэффициент Пуассона
 ξ, ξ_n — параметр затухания в долях от критического
 ρ — амплитуда вектора, плотность
 σ — напряжение
 τ — время
 φ_{ij} — модальное перемещение
 φ_n — форма колебаний n -го тона
 Φ — матрица форм колебаний
 ψ, ψ_n — функция обобщенных перемещений
 Ψ_n — вектор обобщенных перемещений
 ω, ω_n — круговая частота незатухающих собственных колебаний
 ω_D, ω_{Dn} — круговая частота собственных колебаний с учетом затухания
 $\bar{\omega}$ — круговая частота внешнего гармонического воздействия

ВВЕДЕНИЕ

В.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИНАМИКЕ СООРУЖЕНИЙ

В.1.1. ОСНОВНАЯ ЦЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СООРУЖЕНИЙ

Основная цель этой книги — изложить методы анализа напряжений и прогибов, возникающих в конструкциях любого сооружения при действии произвольных динамических нагрузок. В определенном смысле эта задача может рассматриваться как развитие стандартных методов расчета, которые, как правило, относятся к статическому нагружению, применительно к динамическим нагрузкам. Однако при анализе упругих систем удобно отдельно рассматривать статические и динамические компоненты приложенной нагрузки для раздельного определения реакции от каждого вида нагрузки, а затем объединять обе компоненты реакции для оценки общей реакции. Следуя этому подходу, статический и динамический методы расчета можно рассматривать принципиально различными по своей природе. В рамках такого подхода понятие *динамический* можно определить как изменяющийся во времени. Тогда динамическая нагрузка представляет собой любую нагрузку, величина которой, направление и место приложения изменяются во времени. Аналогично реакция системы при динамической нагрузке (результатирующие прогибы и напряжения) также изменяется во времени и является динамической.

Два принципиально различных подхода используются для вычисления реакции систем при динамических нагрузках: детерминированный и недетерминированный. Выбор применяемого метода для каждого конкретного случая зависит от способа определения нагрузки. Когда изменение нагрузки во времени хорошо известно, даже если она является сильно осциллирующей и нерегулярной по своей природе, то ее называют *хорошо определенной (детерминированной) динамической*. Анализ реакции любой системы при хорошо определенной динамической нагрузке рассматривается как детерминированный. С другой стороны, когда изменение нагрузки во времени известно не полностью, но может быть определено в вероятностном смысле, то такую нагрузку называют *случайной динамической*. Недетерминированный анализ реакции сооружений является соответственно анализом при случайных динамических нагрузках.

Как правило, реакция сооружений при любой динамической нагрузке выражается в виде перемещений конструкции. Поэтому детерминированный анализ позволяет определить изменение перемещений во времени, которые соответствуют заданному процессу изменения нагрузки. Другие параметры детерминированной реакции сооружений, такие, как напряжения, деформации, внутренние усилия и т. п., определяют на втором этапе расчета исходя из ра-

нее вычисленных распределений перемещений. Недетерминированный расчет приводит к вероятностному описанию перемещений при нагрузке, определенной статистически. В этом случае изменение перемещений во времени не вычисляется, и другие параметры реакции (напряжения, внутренние усилия и т. п.) должны определяться из непосредственного недетерминированного расчета, а не по результатам определения перемещений.

В.1.2. ВИДЫ ХОРОШО ОПРЕДЕЛЕННЫХ НАГРУЗОК

Любая строительная конструкция в процессе эксплуатации может подвергаться тем или иным динамическим нагрузкам. Для расчета удобно разделить хорошо определенные (детерминированные)

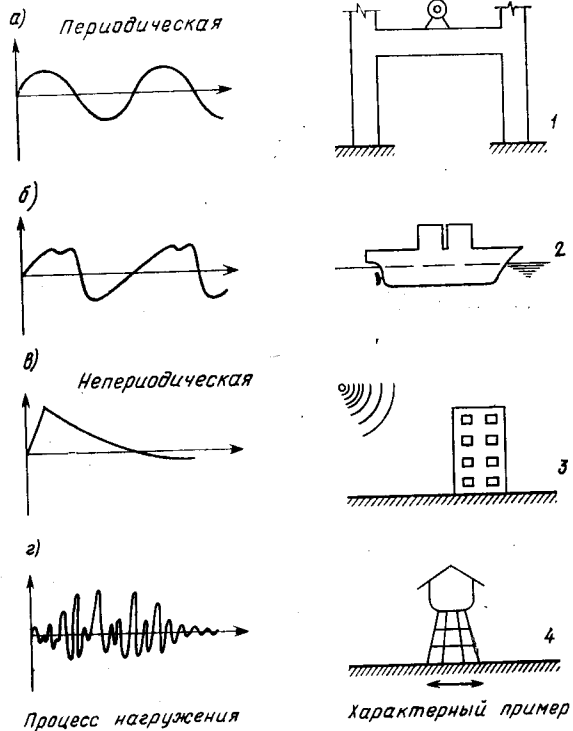


Рис. В.1. Характеристики и источники типичных динамических нагрузок: а — простая гармоническая; б — сложная; в — импульсивная; г — длительная; 1 — вибрационное оборудование в здании; 2 — нагрузка от вращения винтов корабля; 3 — нагрузка на здание от взрыва бомбы; 4 — сейсмическое воздействие на водонапорную башню

ные) нагрузки на периодические и непериодические. Некоторые характерные виды хорошо определенных нагрузок и источники их возникновения показаны на рис. В.1.

Периодические нагрузки (рис. В.1, а и б) являются повторными нагрузками, для которых существует один и тот же период времени повторения при большом числе циклов. Наиболее простая периодическая нагрузка — синусоидальное воздействие (см. рис. В.1, а), которое называется *простой гармоникой*. Такие нагрузки характерны для вибрационных машин с неуравновешенными массами. Другие виды периодических нагрузок обычно более сложные, например, гидродинамическое давление от винтов корабля или инерционные нагрузки от оборудования с возвратно-ступательным движением. Однако с помощью анализа Фурье любая периодическая нагрузка может быть представлена в виде суммы простых гармонических составляющих. Тогда анализ реакции при любой периодической нагрузке в принципе сводится к одним и тем же общим методам.

Непериодические нагрузки могут быть либо кратковременными импульсивными, либо продолжительными нагрузками общего типа. Взрыв — характерный источник импульсивной нагрузки. Для таких кратковременных нагрузок можно использовать специальные методы упрощенного расчета. С другой стороны, любая продолжительная нагрузка, как, например, нагрузка от землетрясений, может рассматриваться только с помощью методов общего динамического анализа.

В.1.3. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СООРУЖЕНИЙ

Динамический расчет сооружений отличается от статического двумя важными моментами. Во-первых, нагрузка и реакция изменяются во времени. В связи с этим динамическая задача не имеет

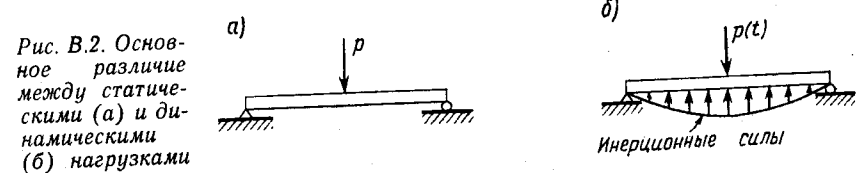


Рис. В.2. Основное различие между статическими (а) и динамическими (б) нагрузками

единственного решения, как статическая. Поэтому необходимо выбрать последовательность решений, соответствующих всем моментам времени, которые представляют интерес при определении реакции сооружения. Таким образом, динамический расчет значительно более сложен и трудоемок, чем статический.

Другое, более существенное различие между статическими и динамическими задачами иллюстрируется на рис. В.2. Если шарнирно опертая балка нагружена статической силой p (см. рис. В.2, а), то ее внутренние моменты и перерезывающие силы, а также форма изгиба определяются только заданной силой и могут быть вычислены исходя из принципов равновесия усилий. Если же нагрузка $p(t)$

динамическая (см. рис. В.2, б), то перемещения балки определяются ускорениями, которые вызывают силы инерции. Таким образом, внутренние моменты и перерезывающие силы в балке на рис. В.2, б должны уравнивать не только внешнюю приложенную нагрузку, но и силы инерции, возникающие при ускорении балки.

Силы инерции, которые оказывают сопротивление ускорениям системы, — очень важная отличительная характеристика задач динамики сооружений. Как правило, если инерционные нагрузки составляют существенную часть общих нагрузок, которые уравниваются внутренними силами упругости сооружения, то динамический характер задачи должен учитываться при ее решении. Если же движения системы настолько медленные, что силы инерции пренебрежимо малы, то можно применить метод статического расчета для любого момента времени, даже если нагрузка и реакция сооружения изменяются во времени.

В.1.4. МЕТОДЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

В.1.4.1. Метод сосредоточенных масс. Расчет динамической системы (см. рис. В.2, б) существенно усложняется в связи с тем, что силы инерции зависят от перемещений конструкции, которые в свою очередь определяются значениями инерционных нагрузок. Этот

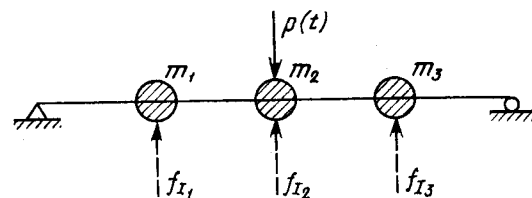


Рис. В.3. Простая балка, представленная в виде модели с сосредоточенными массами

замкнутый цикл причины и следствия может быть непосредственно решен только рассмотрением задачи в форме дифференциальных уравнений. Более того, поскольку масса балки непрерывно распределена по ее длине, для нахождения сил инерции должны определяться значения перемещений и ускорений для каждой точки оси балки. В связи с тем что координата вдоль пролета и время должны рассматриваться как независимые переменные, задача в этом случае формулируется в виде дифференциальных уравнений с частными производными.

Если масса балки сосредоточена в нескольких дискретных точках (рис. В.3), то задача расчета существенно упрощается, так как силы инерции могут определяться только для точек сосредоточения масс. В этом случае перемещения и ускорения системы можно рассматривать также лишь для этих дискретных точек.

Число компонент перемещений, которые необходимо учитывать для описания всех инерционных сил сооружения, называется *числом динамических степеней свободы*. Например, система на рис. В.3, защемленная таким образом, что все три массы могут перемещать-

ся только в вертикальном направлении, — это система с тремя степенями свободы. Если данные массы не сосредоточены, а имеют конечную инерцию при повороте, следует рассмотреть также перемещения при повороте трех точек, и балка становится системой с шестью степенями свободы. Если при этом учесть осевые деформации балки, параллельные ее оси, то балку следует рассматривать как систему с девятью степенями свободы. В общем случае когда сооружение может деформироваться в трехмерном пространстве, каждая масса будет иметь шесть степеней свободы, а сооружение в целом — восемнадцать. Если массы сосредоточены в точках так, что моментами инерции поворота можно пренебречь, то трехмерная система будет иметь девять степеней свободы. Из изложенного видно, что система с распределенной массой (см. рис. В.2, б) имеет бесконечное число степеней свободы.

В.1.4.2. Обобщенные перемещения. Приведенная ранее модель с сосредоточенными массами представляет собой простой метод ограничения числа степеней свободы, который должен быть рассмотрен при решении задач динамики сооружений. Модель с сосредоточенными массами наиболее целесообразна при анализе систем, у которых значительная часть полной массы действительно сосредоточена в нескольких дискретных точках. Тогда можно предположить, что масса сооружения также включена в эти дискретные массы, а само сооружение рассматривается невесомым.

Когда масса системы равномерно распределена, более предпочтителен альтернативный подход к ограничению числа степеней свободы. Этот метод основан на допущении, что форма изгиба сооружения может быть выражена в виде суммы простых форм перемещений. Тогда эти формы становятся координатами перемещений сооружения. В качестве простого примера использования этого подхода представим прогиб шарнирно опертой балки тригонометрическими функциями. При этом прогиб выражается суммой независимых синусоид, как показано на рис. В.4, или в математической форме

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (B.1)$$

Любая форма изгиба, обусловленная заданными граничными условиями, может быть представлена бесконечным рядом таких синусоид. Амплитуды этих синусоид можно принять в качестве координат системы, и бесконечное число степеней свободы реальной балки представляется бесконечным числом членов ряда. Преимущество этого подхода заключается в том, что можно хорошо аппроксимировать форму изгиба реальной балки путем ограничения членов ряда гармоник. Так, система с тремя степенями свободы будет описываться только тремя членами ряда.

Этот подход может быть в дальнейшем обобщен, если принять, что синусоидальные формы перемещений есть результат произвольного выбора для данного примера. В общем случае любые формы $\psi_n(x)$,

удовлетворяющие геометрическим граничным условиям, могут быть приняты, если они обеспечивают совместность перемещений. Тогда общее выражение для перемещений любой одномерной системы можно записать в виде

$$v(x) = \sum_n Z_n \psi_n(x). \quad (B.2)$$

Для любой заданной системы функций перемещений $\psi_n(x)$ общая форма колебаний сооружения зависит от амплитуд Z_n , которые могут рассматриваться как *обобщенные координаты*. Число пред-

метода конечного элемента (МКЭ), позволяет построить удобную и обоснованную модель системы и особенно эффективен при расчетах с помощью ЭВМ.

Модель в виде конечных элементов применима к сооружениям любого типа: рамным конструкциям, которые включают в себя сопряжения одномерных элементов (балок, колонн и т. п.); к системам типа плит и оболочек, которые состоят из двухмерных компонент, и к трехмерным телам общего типа. Для простоты рассмотрим только одномерную модель конечного элемента. Однако этот подход может быть развит для анализа двух- и трехмерных систем.

Первый этап представления любого сооружения, например балки на рис. В.5, в виде системы конечных элементов заключается

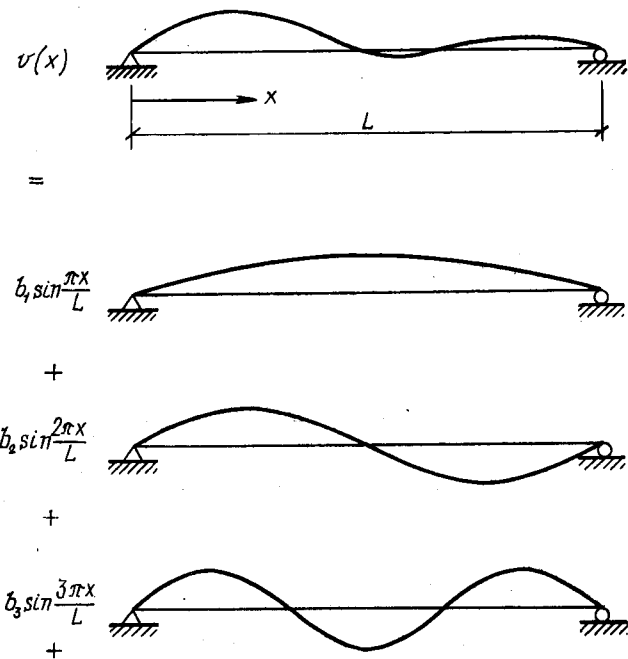


Рис. В.4. Прогиб шарнирно опертой балки, представленной в виде ряда синусоид

полагаемых форм характеризует число степеней свободы, учитываемых для данной модели. Как правило, для заданного числа степеней свободы большая степень точности может быть достигнута при динамическом расчете путем использования метода форм деформаций, чем при применении метода сосредоточенных масс. Однако следует помнить, что при использовании обобщенных координат с введением каждой дополнительной степени свободы увеличивается объем вычислений.

В.1.4.3. Метод конечного элемента. В настоящее время получил распространение третий метод выражения перемещений любого сооружения через конечное число координат перемещений, который объединяет особенности как метода сосредоточенных масс, так и метода обобщенных координат. Этот метод, разработанный на базе

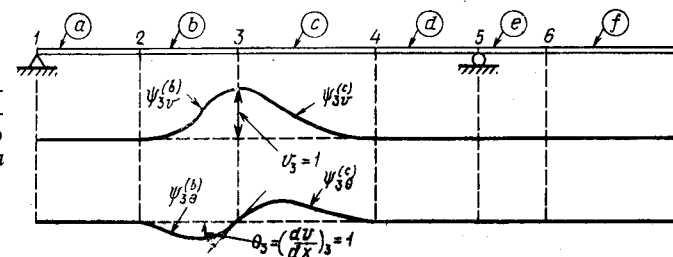


Рис. В.5. Координаты типового конечного элемента для балки

в разделении сооружения на соответствующее число элементов. Их размер может быть произвольным. Элементы могут иметь одинаковые размеры или различные. Концы элементов, которыми они соединяются между собой, называются *узловыми точками*. Перемещения этих узловых точек принимаются в качестве обобщенных координат сооружения.

Прогиб сооружения в целом выразим через обобщенные координаты с помощью соответствующего набора функций перемещений, используя выражения типа (B.2), причем функции перемещений называются *интерполяционными*, поскольку они определяют форму деформаций между указанными узловыми перемещениями. На рис. В.5 в качестве примера показаны интерполяционные функции, связанные с двумя степенями свободы точки 3, которая получает поперечные перемещения в плоскости рисунка. В принципе эти интерполяционные функции могут быть заданы любой непрерывной кривой, которая удовлетворяет геометрии перемещений, вызываемых узловыми перемещениями. Для одномерных элементов удобно принять формы колебаний в виде балочных функций, которые вызываются узловыми перемещениями в однородной балке (они являются кубическими полиномами Эрмита и показаны на рис. В.5).

Поскольку функции перемещений, используемые в этом методе, удовлетворяют требованиям, которые установлены ранее, то очевидно, что координаты в методе МКЭ представляют собой специальную систему обобщенных координат. Преимущества такого подхода заключаются в следующем:

1. Любое желаемое число обобщенных координат может быть использовано путем разделения сооружения на соответствующее число конечных элементов.

2. Поскольку функции перемещений для конечных элементов могут быть одинаковыми, процесс вычислений существенно упрощается.

3. Используемые при данном подходе уравнения мало связаны между собой, так как каждое узловое перемещение влияет только на соседний элемент, вследствие чего вычислительный процесс еще более упрощается.

В целом метод МКЭ представляет собой наиболее эффективный метод выражения перемещений любой строительной конструкции с помощью дискретной системы координат.

В.1.5. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Как уже отмечалось, основная задача детерминированного анализа динамики сооружений — определение характера изменения во времени перемещений заданной системы под действием заданной переменной нагрузки. В большинстве случаев приближенный анализ с учетом ограниченного числа степеней свободы дает приемлемую точность, и поэтому задача сводится к анализу временных функций изменения выбранных компонентов перемещений. Математические выражения, определяющие динамические перемещения, называются *уравнениями движения* сооружения. В результате решения этих уравнений движения можно определить искомые функции изменения перемещений во времени.

Вывод уравнений движения динамической системы представляет собой, по-видимому, самый важный (и иногда самый трудный) этап всего анализа. В настоящей работе будут использованы три различных метода вывода уравнений, причем каждый из методов обладает преимуществами при решении задач определенного класса. Основные принципы каждого из указанных методов рассматриваются в следующих параграфах.

В.1.5.1. Метод равновесия с использованием принципа Даламбера. Уравнения движения любой динамической системы представляют собой выражения второго закона Ньютона, который устанавливает, что скорость изменения импульса любой массы равна действующей на нее силе. В математической форме это положение записывается в виде следующего дифференциального уравнения:

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dv}{dt} \right), \quad (B.3)$$

где $p(t)$ — вектор приложенной силы; $v(t)$ — вектор координат массы m .

Для большинства задач динамики сооружений массу можно рассматривать не изменяющейся во времени. Тогда уравнение (B.3)

получает вид

$$p(t) = m \frac{d^2v}{dt^2} = m \ddot{v}(t), \quad (B.3a)$$

где точки обозначают дифференцирование по времени.

Уравнение (B.3a) выражает условие равенства силы произведения массы на ускорение

$$p(t) - m \ddot{v}(t) = 0. \quad (B.3b)$$

В этом уравнении второе слагаемое $m \ddot{v}(t)$ называется *силой инерции*, которая оказывает сопротивление ускорению массы.

Принцип Даламбера (масса вызывает силу инерции, пропорциональную ее ускорению и противоположно ему направленную) широко используется в задачах динамики сооружений, поскольку позволяет вывести уравнения движения на основании условий динамического равновесия. Сила $p(t)$ может включать в себя разные виды сил, приложенных к массе: упругое сопротивление, направленное противоположно перемещениям; силы затухания, сопротивляющиеся скоростям перемещений, и независимо заданные внешние нагрузки. Таким образом, если ввести силу инерции, препятствующую ускорениям системы, то уравнение движения выражает условие равновесия всех сил, приложенных к массе. Для большинства простых задач указанный метод вывода уравнений движения самый простой и удобный.

В.1.5.2. Принцип возможных перемещений. Когда конструктивная схема сооружения достаточно сложная и содержит ряд взаимосвязанных точек сосредоточения масс или тел конечных размеров, непосредственный вывод условий равновесия всех действующих на систему сил затрудняется. Переменные силы часто допускают выражение через перемещения по степеням свободы, но записать условия их равновесия очень сложно. В этих случаях для вывода уравнений движения вместо условий равновесия можно использовать принцип возможных (виртуальных) перемещений.

Принцип возможных перемещений формулируется следующим образом. Если система, находящаяся в состоянии равновесия под действием нескольких сил, получает возможное перемещение, т. е. любое перемещение, удовлетворяющее граничным условиям, то полная работа всех сил на этом перемещении равна нулю. Очевидно, что, согласно данному принципу, равенство нулю работы сил на возможном перемещении системы эквивалентно условию равновесия. Поэтому уравнения реакции динамической системы могут быть получены: 1) определением всех сил, приложенных к массам системы, включая силы инерции, которые определяются в соответствии с принципом Даламбера; 2) введением возможных (виртуальных) перемещений, соответствующих каждой степени свободы, и приравнением нулю работы всех сил. Существенное преимущество этого подхода состоит в том, что слагаемые работ сил на возможных пере-

мещениях — скалярные величины и могут складываться алгебраически, между тем силы, действующие на сооружения, есть векторы и могут складываться только по правилам векторного анализа.

В.1.5.3. Принцип Гамильтона. Существует еще один метод, который не требует вывода векторных уравнений равновесия. Он заключается в использовании скалярных величин энергии в вариационной постановке. Наиболее распространенный вариационный метод — принцип Гамильтона, который можно выразить следующим образом:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0, \quad (B.4)$$

где T — общая кинетическая энергия системы; V — потенциальная энергия системы, включающая как энергию деформации, так и потенциал любых консервативных внешних сил; W_{nc} — работа, произведенная неконсервативными силами, действующими на систему, включая затухание и другие произвольные внешние нагрузки; δ — вариация для определенного временного интервала.

Принцип Гамильтона устанавливает, что вариация кинетической и потенциальной энергии плюс вариация работы неконсервативных сил в течение любого интервала времени от t_1 до t_2 должна равняться нулю. Применение этого принципа позволяет непосредственно получить уравнения движения для любой заданной системы. Этот метод отличается от принципа возможных перемещений тем, что в его формулировку не включаются инерционные и упругие силы. Вместо них учитываются значения соответственно кинетической и потенциальной энергии. Таким образом, этот метод обладает тем преимуществом, что он рассматривает только чисто скалярные величины энергий, в то время как в методе возможных перемещений все силы и перемещения являются по своему характеру векторами даже в том случае, когда работа характеризуется скалярными величинами.

Принцип Гамильтона может применяться также при решении задач статики сооружений. В этом случае значение кинетической энергии T не учитывается, а подынтегральные выражения в оставшихся членах уравнения (B.4) инвариантны во времени. Таким образом, уравнение принимает форму

$$\delta(V - W_{nc}) = 0, \quad (B.5)$$

т. е. форму хорошо известного принципа минимума потенциальной энергии, широко применяемого в статическом анализе.

* *

Таким образом, уравнения движения динамической системы могут быть сформулированы с помощью любого из трех методов. Самым простым является метод динамического равновесия всех сил в системе, включая инерционные силы, определяемые по принципу

Даламбера. Однако для более сложных систем, особенно с распределенными массами и упругими силами, непосредственная запись условий равновесия векторных величин может оказаться затруднительной, и более удобно определять скалярные величины работы или энергии. Более рациональный метод основан на принципе возможных (виртуальных) перемещений, согласно которому силы, действующие на систему, вычисляются непосредственно, а уравнения движения выводятся из выражений работы этих сил на возможных перемещениях. С другой стороны, в выражениях для энергии по принципу Гамильтона непосредственно не используются инерционные и консервативные силы в системе, вместо них учитываются вариации кинетической и потенциальной энергии системы.

Все три метода абсолютно равноценны и приводят к одним и тем же уравнениям движения. Обычно выбор метода для любого конкретного случая зависит от типа рассматриваемой динамической системы и определяется самим исследователем.

ЧАСТЬ I

СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

ГЛАВА I

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

1.1. КОМПОНЕНТЫ ОСНОВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Основные физические параметры любой линейно-упругой конструктивной системы, подверженной динамическим нагрузкам, — ее масса, упругие свойства (гибкость или жесткость), механизм расхода энергии или затухание и внешний источник возбуждения или воздействия. Простейшей моделью системы с одной степенью свободы служит модель, каждый параметр которой считается сосредоточенным (рис. 1.1, а).

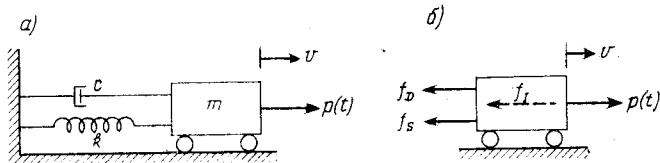


Рис. 1.1. Модель системы с одной степенью свободы: а — основные элементы; б — уравновешенные силы

Вся масса m этой системы сосредоточена в жестком блоке. Ролики ограничивают этот блок так, что он может двигаться лишь поступательно, таким образом единственная координата перемещения v полностью определяет положение массы. Упругое сопротивление перемещению обеспечивается невесомой пружиной с жесткостью k , а механизм потери энергии представлен демпфером c . Внешнее воздействие, вызывающее динамическую реакцию данной системы, принято в виде переменной во времени нагрузки $p(t)$.

1.2. ФОРМЫ ЗАПИСИ УРАВНЕНИЙ

1.2.1. Метод равновесия. Уравнение движения системы, показанной на рис. 1.1, а, может быть получено любым из трех методов, рассмотренных во введении. Однако для этого простейшего случая уравнение легче всего вывести, используя непосредственное выражение равновесия всех сил, действующих на массу. Как видно из рис. 1.1, б, силы, действующие в направлении перемещения вдоль степени свободы, включают приложенную нагрузку $p(t)$ и три силы, вызываемые движением: инерционную f_I , диссипативную f_D и силу упругой пружины f_S . Таким образом, уравнение движения выражает равновесие этих сил:

$$f_I + f_D + f_S = p(t). \quad (1.1)$$

Каждая из сил в левой части уравнения выражается функцией перемещения v или его производных. Положительное направление

этих сил выбрано противоположным направлению перемещения, так как они сопротивляются приложенным внешним нагрузкам.

Рассмотрим сначала упругую силу. Она характеризуется произведением жесткости пружины на перемещение

$$f_S = kv. \quad (1.2a)$$

Аналогичным образом по принципу Даламбера сила инерции — произведение массы на ускорение

$$f_I = m\ddot{v}. \quad (1.2b)$$

И, наконец, при вязком затухании сила затухания равна произведению постоянной затухания c на скорость системы

$$f_D = cv. \quad (1.2в)$$

После подстановки выражений (1.2, а, б, в) в уравнение (1.1) получаем уравнение движения рассматриваемой системы с одной степенью свободы:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t). \quad (1.3)$$

1.2.2. Принцип возможных перемещений. Рассмотрим применение принципа возможных перемещений для получения этого уравнения движения. Силы, действующие на массу, показаны на рис. 1.1, б. Если масса получает виртуальное (возможное) перемещение δv (единственное перемещение, совместимое с наложенными на систему связями), то каждая из этих сил будет производить работу. Тогда общую работу можно выразить уравнением

$$-f_I \delta v - f_D \delta v - f_S \delta v + p(t) \delta v = 0, \quad (1.4)$$

в котором отрицательные знаки определяются тем, что силы действуют в направлении, противоположном возможному перемещению.

Подставляя уравнения (1.2, а, б, в) в (1.4) после вынесения δv за скобки, получаем:

$$[-m\ddot{v} - c\dot{v} - kv + p(t)]\delta v = 0. \quad (1.5)$$

Так как δv не равно нулю, то из выражения (1.5) можно получить (1.3).

1.2.3. Применение принципа Гамильтона. В заключение получим уравнение движения данной системы с помощью принципа Гамильтона [уравнение В.4, с. 20)]. Согласно определению, кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{v}^2, \quad (1.6a)$$

а потенциальная энергия, представляющая только энергию деформации U пружины,

$$V = U = \frac{1}{2} kv^2. \quad (1.6б)$$

Неконсервативными силами в системе, показанной на рис. 1.1, б, являются сила затухания f_D и приложенная нагрузка $p(t)$. Вариация работы этих сил записывается в форме

$$\delta W_{nc} = p(t) \delta v - c \dot{v} \delta v, \quad (1.6в)$$

что эквивалентно уравнению работы этих сил на возможных перемещениях, записанному в форме (1.5).

После подстановки выражений (1.6, а, б, в) в уравнение (В.4), записи его в форме вариаций и выполнения преобразований получаем:

$$\int_{t_1}^{t_2} [m \dot{v} \delta \dot{v} - c \dot{v} \delta v - k v \delta v + p(t) \delta v] = 0. \quad (1.7)$$

Теперь первый член уравнения (1.7) можно проинтегрировать по частям, откуда

$$\int_{t_1}^{t_2} m \dot{v} \delta v = m v \delta v \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{v} \delta v dt, \quad (1.8)$$

где $\delta \dot{v} = d(\delta v)/dt$.

В связи с тем что в соответствии с принципом Гамильтона вариация δv равна нулю при пределах интегрирования t_1 и t_2 , первый член правой части уравнения (1.8) также равен нулю. Поэтому если уравнение (1.8) подставить в уравнение (1.7), получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m \ddot{v} - c \dot{v} - kv + p(t)] \delta v dt = 0. \quad (1.9)$$

Так как вариация δv произвольная, то уравнение (1.9) удовлетворяется в общем случае лишь при условии, что выражение в скобках равно нулю. Тогда его можно будет представить в виде уравнения (1.3).

Этот пример показывает, как одно и то же уравнение движения можно получить каждым из трех основных методов. Очевидно, при анализе этой простой системы следует предпочесть метод равновесия сил.

1.3. ВЛИЯНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Рассмотрим теперь систему, показанную на рис. 1.2, а, которая представляет собой систему на рис. 1.1, а, повернутую на 90° так, что сила тяжести действует в направлении перемещения. Система сил, действующих на массу, показана на рис. 1.2, б. Используя выражения (1.2, а, б, в), получим уравнение равновесия сил

$$m \ddot{v} + c \dot{v} + kv = p(t) + W, \quad (1.10)$$

где W — вес жесткого блока.

Однако если общее перемещение v выражается как сумма статического перемещения Δ_{st} , вызванного весом W , и дополнительного динамического перемещения \bar{v} (см. рис. 1.2),

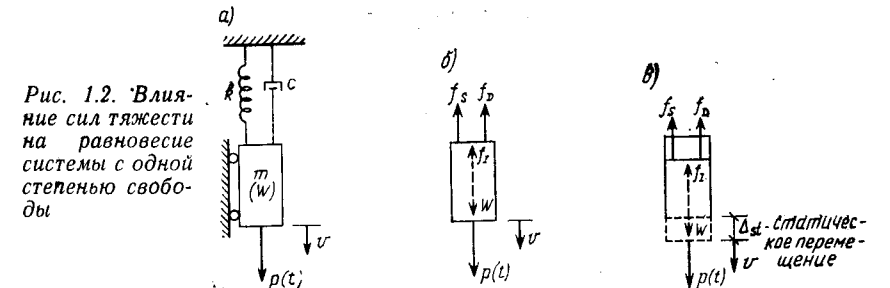
$$v = \Delta_{st} + \bar{v}, \quad (1.11)$$

то сила упругости пружины равна:

$$f_s = kv = k \Delta_{st} + k \bar{v}. \quad (1.12)$$

Подставляя уравнение (1.12) в (1.10):

$$m \ddot{\bar{v}} + c \dot{\bar{v}} + k \Delta_{st} + k \bar{v} = p(t) + W \quad (1.13)$$



и, учитывая, что $k \Delta_{st} = W$, получаем:

$$m \ddot{\bar{v}} + c \dot{\bar{v}} + k \bar{v} = p(t). \quad (1.14)$$

После дифференцирования уравнения (1.11) с учетом того, что Δ_{st} не изменяется во времени, получаем $\ddot{v} = \ddot{\bar{v}}$ и т. д., так что уравнение (1.14) можно записать в виде

$$m \ddot{v} + c \dot{v} + kv = p(t). \quad (1.15)$$

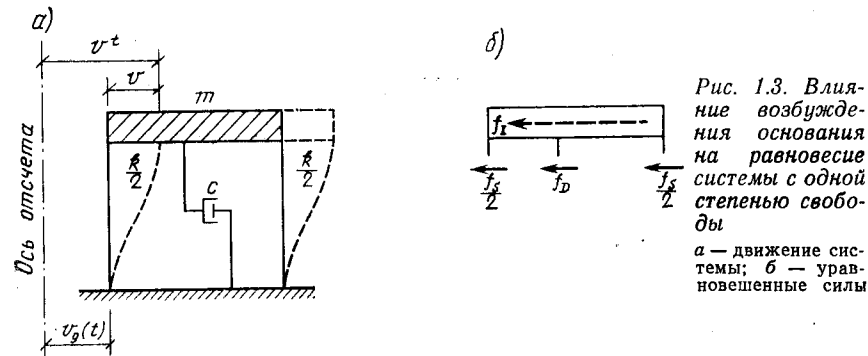
Сравнение уравнений (1.15) и (1.3) показывает, что на уравнение движения, полученное из условия статического равновесия динамической системы, не влияют силы тяжести. Поэтому в дальнейшем перемещения будут определяться отдельно из условия статического равновесия, а определяемые из динамического анализа перемещения будут рассматриваться как динамическая реакция. Следовательно, общие прогибы, напряжения и т. д. можно получить сложением соответствующих статических величин с результатами динамического анализа.

1.4. ВЛИЯНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОСНОВАНИЯ

Динамические напряжения и прогибы в конструкции могут быть вызваны не только изменяющейся во времени внешней нагрузкой (см. рис. 1.1 и 1.2), но и перемещениями основания. Наглядным примером такого движения являются колебания оснований зданий, вызванные землетрясением, или частей оборудования от виб-

рации здания, в котором оно установлено. Упрощенная модель колебаний здания при сейсмическом воздействии показана на рис. 1.3, причем горизонтальное движение грунта при землетрясении характеризуется перемещением v_g относительно произвольной точки отсчета.

Предполагается, что горизонтальный ригель рамы абсолютно жесткий и на его уровне сосредоточена вся масса конструкции. Вертикальные колонны считаются невесомыми и несжимаемыми в продольном направлении, а сопротивление перемещению ригеля, оказываемое каждой колонной, характеризуется упругостью модели-



рующей ее пружины $k/2$. Таким образом, масса имеет одну степень свободы v , которая определяется изгибом колонн, а демпфер c вызывает сопротивление, пропорциональное скорости перемещения.

Как показано на рис. 1.3, б, уравнение равновесия системы имеет вид

$$f_I + f_D + f_S = 0, \quad (1.16)$$

где сила затухания и сила упругости выражаются аналогично соотношениям (1.2, а, в).

Сила инерции в этом случае принимается равной:

$$f_I = m \ddot{v}^t, \quad (1.17)$$

где v^t — суммарное отклонение массы от оси отсчета.

Подставляя силы инерции, затухания и упругости в уравнение (1.16), получим:

$$m \ddot{v}^t + c \dot{v} + kv = 0. \quad (1.18)$$

До решения этого уравнения все его члены необходимо выразить в функции одной переменной с учетом того, что общее перемещение массы является суммой перемещения основания и прогибов, т. е.

$$v^t = v + v_g. \quad (1.19)$$

Выражая силу инерции через две компоненты ускорения, полученные дифференцированием уравнения (1.19), после подстановки ре-

зультата в уравнение (1.18) получаем:

$$m \ddot{v} + m \ddot{v}_g + c \dot{v} + kv = 0 \quad (1.20)$$

или ввиду того что ускорение грунта характеризует особое динамическое воздействие на конструкцию, уравнение колебаний удобно записать в виде

$$m \ddot{v} + c \dot{v} + kv = -m \ddot{v}_g(t) \equiv p_{eff}(t). \quad (1.21)$$

В этом уравнении $p_{eff}(t)$ — эффективная нагрузка на раму, вызывающая ее колебания; другими словами, конструкция реагирует на ускорение грунта $\ddot{v}_g(t)$ точно так же, как она реагировала бы на внешнюю нагрузку $p(t)$, равную произведению массы на ускорение грунта.

Отрицательный знак в соотношении (1.21) означает, что эффективная нагрузка направлена противоположно ускорению грунта. На практике знак выражения не имеет большого значения, поскольку обычно принимают, что входное воздействие на фундамент действует в произвольном направлении.

1.5. ОБОБЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ. СИСТЕМЫ ЖЕСТКИХ ТЕЛ

Все рассмотренные до сих пор задачи очень простые, потому что каждый из физических параметров системы (масса, затухание и упругость) представлен в виде одного дискретного элемента. Однако расчет конструкций реальных сооружений требует применения более сложных моделей даже в том случае, когда конструкции можно рассматривать как системы с одной степенью свободы. Для удобства изложения в данной книге выделены два класса обобщенных систем с одной степенью свободы: системы жестких тел, в которых упругие деформации ограничиваются в пределах пружин между телами, и системы, имеющие распределенные параметры упругости, деформации которых распределены по всей конструкции или в пределах некоторых ее элементов. В обоих случаях конструкция работает как система с одной степенью свободы, поскольку допускаются перемещения только по одной форме. Для класса систем в виде жестких тел, рассматриваемых в этой главе, ограничение одной формой перемещений часто определяется геометрией сопрягаемых тел, т. е. перемещения жестких тел ограничиваются связями и шарнирами так, что возможно перемещение только в одном направлении. Для систем с распределенными параметрами упругости, которые будут рассмотрены в разд. 1.7, принятие одной формы колебаний как для системы с одной степенью свободы является допущением. На самом деле такие системы обладают бесконечным числом степеней свободы.

При выводе уравнений движения системы жестких тел силы упругости, возникающие при перемещениях системы (с одной степе-

нью свободы), можно легко выразить через амплитуду перемещений, так как каждый упругий элемент является дискретной пружиной с заданной величиной деформации. Аналогично силы затухания можно выразить в функции заданных скоростей точек крепления дискретных демпферов. Массу жестких тел не следует принимать сосредоточенной, а распределенные силы инерции определяются заданными ускорениями. Однако при динамическом анализе более целесообразно рассматривать силы инерции жестких тел при условии, что массы и моменты инерции вращения сосредоточены в центре масс. Равнодействующая сила инерции, полученная таким образом, эквивалентна распределенным силам инерции вследствие принятой предпосылки о характере работы системы (таким же образом целесообразно с помощью равнодействующих характеризовать любые распределенные нагрузки, действующие на жесткие тела). Выражения для массы и момента инерции поворота однородного стержня и пластин различной формы приведены на рис. 1.4.

Пример 1.1. Система состоит из двух жестких стержней, соединенных шарнирно в точке B , неподвижно опирающихся в точке A и шарнирно в точке C (рис. 1.5). Динамическое воздействие определяется поперечной нагрузкой $p(x, t)$, которая изменяется вдоль оси стержня AB по линейному закону. Кроме того, на всю систему действует постоянная осевая сила N . Движение системы ограничивается дискретными пружинами и демпферами, расположенными по длине стержней, как показано на рисунке. Масса равномерно распределена вдоль стержня AB , а невесомый стержень BC несет сосредоточенную массу m_2 .

Поскольку принято, что два стержня абсолютно жесткие, то система имеет только одну степень свободы и ее динамическая реакция может быть выражена с помощью уравнения движения. Это уравнение можно вывести из условия равновесия (для читателя это полезное упражнение), но ввиду сложности системы удобнее использовать формулировку для работы и энергии. Воспользуемся принципом возможных перемещений, хотя можно было бы использовать и принцип Гамильтона.

При перемещении рассматриваемой системы с одной степенью свободы (рис. 1.6) за основной параметр можно принять движение шарнира $Z(t)$, а все остальные перемещения выразить через него. Например, $DD' = Z/4$, $EE' = 3Z/4$, $FF' = 2Z/3$.

Силы, действующие на систему (за исключением осевой нагрузки N , которая будет рассмотрена позднее), также показаны на рисунке. Каждая сила сопротивления может быть выражена через перемещение Z или его производные по времени следующим образом:

$$\begin{aligned} f_{S1} &= k_1(EE') = k_1^{3/4} Z(t); \\ f_{S2} &= k_2(GG') = k_2^{1/3} Z(t); \\ f_{D1} &= c_1 \left(\frac{d}{dt} DD' \right) = c_1^{1/4} \dot{Z}(t); \\ f_{D2} &= c_2 \dot{Z}(t); \\ f_{I1} &= m_1^{1/2} \ddot{Z}(t) = \bar{m} L^{1/2} \ddot{Z}(t) = 2a\bar{m} \ddot{Z}(t); \\ \mathcal{M}_{I1} &= I_0 \frac{1}{4a} \ddot{Z}(t) = \frac{\bar{m} L}{4a} \frac{L^2}{12} \ddot{Z}(t) = \frac{1}{3} a^2 \bar{m} \ddot{Z}(t); \\ f_{I2} &= m_2^{2/3} \ddot{Z}(t). \end{aligned}$$

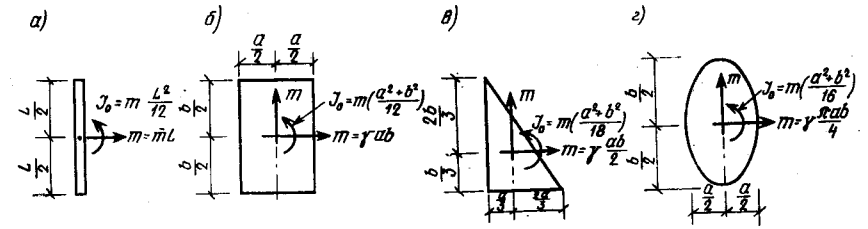


Рис. 1.4. Масса и момент инерции жесткого тела (\bar{m} — погонная масса, γ — масса на единицу площади)
а — однородный стержень; б, в — соответственно однородные прямоугольная и треугольная плиты; г — плита в виде эллипса

Рис. 1.5. Пример системы с одной степенью свободы в виде соприкосновения жестких тел
1 — шарнир; 2 — невесомый жесткий стержень

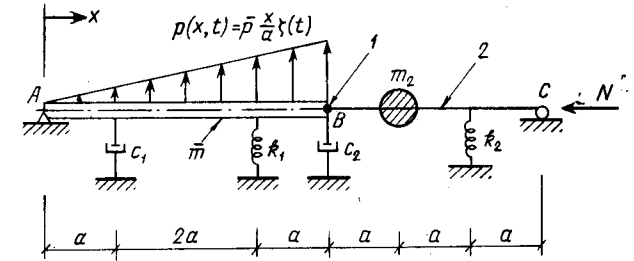
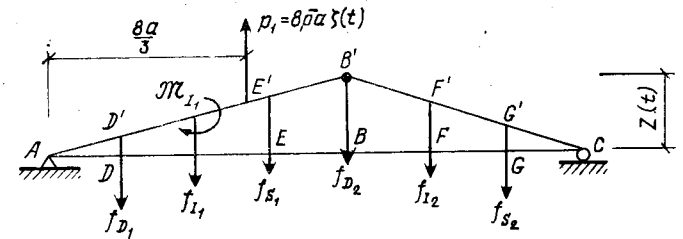


Рис. 1.6. Перемещения системы с одной степенью свободы и нагрузки



Равнодействующая всех внешних приложенных сил равна:

$$p_1 = 8\bar{p}a\zeta(t).$$

В этих уравнениях \bar{m} (или \bar{p}) обозначает массу (или силу) на единицу длины, через которую определяются соответствующие параметры, а $\zeta(t)$ — переменная составляющая динамической нагрузки.

Уравнение движения системы можно получить, приравнявая нулю полную работу этих сил при произвольном возможном перемещении δZ . Возможное перемещение, благодаря которому перемещаются компоненты сил, пропорционально Z , как это показано на рис. 1.6. Таким образом, полную работу на возможных перемещениях можно выразить в виде

$$\begin{aligned} \delta W &= -k_1^{3/4} Z(t) \delta Z - k_2 \frac{Z(t)}{3} \frac{\delta Z}{3} - c_1 \frac{\dot{Z}(t)}{4} \frac{\delta Z}{4} - \\ &- c_2 \dot{Z}(t) \delta Z - 2a\bar{m} \dot{Z}(t) \frac{\delta Z}{2} - \frac{1}{3} a^2 \bar{m} \ddot{Z}(t) \frac{\delta Z}{4a} - \\ &- m_2 \frac{2\ddot{Z}(t)}{3} \delta Z + 8\bar{p}a\zeta(t) \delta Z, \end{aligned} \quad (a)$$

откуда после упрощения

$$\left[\left(\bar{m} + \frac{am}{3} + 4/9 m_2 \right) \ddot{Z}(t) + \left(\frac{c_1}{16} + c_2 \right) \dot{Z}(t) + \left(9/16 k_1 + \frac{k_2}{9} \right) Z(t) - 16/3 \bar{p} a \zeta(t) \right] \delta Z = 0. \quad (6)$$

Так как возможное перемещение δZ произвольно, то выражение в квадратных скобках равно нулю. Наконец, получаем уравнение движения

$$\left(\frac{4}{3} \bar{m} a + \frac{4}{9} m_2 \right) \ddot{Z}(t) + \left(\frac{c_1}{16} + c_2 \right) \dot{Z}(t) + \left(\frac{9}{16} k_1 + \frac{k_2}{9} \right) Z(t) = \frac{16}{3} \bar{p} a \zeta(t). \quad (в)$$

Его можно представить в упрощенном виде

$$m^* \ddot{Z}(t) + c^* \dot{Z}(t) + k^* Z(t) = p^*(t), \quad (1.22)$$

если ввести новые обозначения для величин:

$$m^* = \frac{4}{3} \bar{m} a + \frac{4}{9} m_2;$$

$$k^* = \frac{9}{16} k_1 + \frac{1}{9} k_2;$$

$$c^* = \frac{1}{16} c_1 + c_2;$$

$$p^*(t) = \frac{16}{3} \bar{p} a \zeta(t),$$

которые называются соответственно обобщенными массой, затуханием, жесткостью и нагрузкой для этой системы. Они определены через обобщенную координату $Z(t)$, которая характеризует перемещения системы.

Рассмотрим теперь осевую силу N на рис. 1.5. Как показано на рис. 1.7, работа этой силы на возможном перемещении δZ равна $N \delta e$. Перемещение δe состоит из двух частей δe_1 и δe_2 , связанных с поворотом двух стержней. При рассмотрении влияния только стержня AB из подобия треугольников, представленных на рисунке (при допущении небольших прогибов), получаем $\delta e_1 = (Z/4a) \delta Z$. Аналогично $\delta e_2 = (Z/3a) \delta Z$.

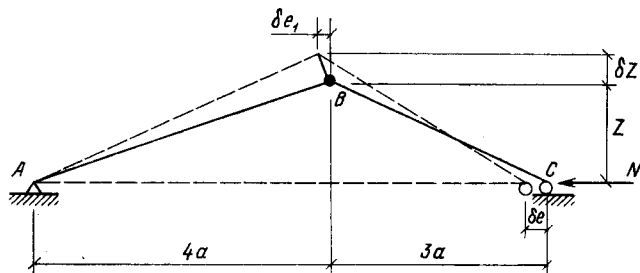


Рис. 1.7. Компоненты перемещения в направлении осевой нагрузки

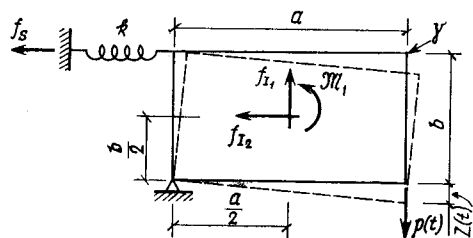


Рис. 1.8. Пластина, представленная в виде системы с одной степенью свободы при действии динамических нагрузок (γ — равномерно распределенная масса)

Таким образом, суммарное перемещение равно:

$$\delta e_1 + \delta e_2 = \frac{7}{12} \frac{Z}{a} \delta Z$$

и работа осевой силы на возможном перемещении

$$\delta W_N = \frac{7}{12} \frac{NZ}{a} \delta Z. \quad (г)$$

Подставляя уравнение (г) в уравнение (а) и выполняя упрощения, аналогичные использованным при выводе уравнения (в), получим уравнение, из которого видно, что осевая сила влияет только на обобщенную жесткость.

При учете влияния осевой силы приведенная обобщенная жесткость \bar{k}^* системы принимает вид

$$\bar{k}^* = k^* - \frac{7}{12} \frac{N}{a} = \frac{9}{16} k_1 + \frac{1}{9} k_2 - 7/12 \frac{N}{a}. \quad (д)$$

При полученном выражении обобщенной жесткости уравнение движения всей системы на рис. 1.8 с учетом осевой силы определяется уравнением, аналогичным (1.22).

Интересно отметить, что условие нулевой обобщенной жесткости характеризует состояние безразличного равновесия или условие потери устойчивости системы. Таким образом, значение осевой силы N_{cr} , которое вызывает потерю устойчивости этой конструкции, можно найти, приравняв \bar{k}^* в уравнении (д) нулю:

$$0 = \frac{9}{16} k_1 + \frac{1}{9} k_2 - 7/12 \frac{N_{cr}}{a}.$$

Таким образом,

$$N_{cr} = \left(\frac{27}{28} k_1 + \frac{4}{21} k_2 \right) a. \quad (е)$$

В общем случае сжимающие осевые нагрузки стремятся уменьшить жесткость строительной конструкции, в то время как растягивающие осевые нагрузки приводят к увеличению жесткости. Такие нагрузки могут оказывать значительное влияние на реакцию конструкции при динамической нагрузке. Поэтому изменение жесткости следует всегда определять для оценки ее значимости при рассмотрении конкретной задачи. В излагаемом и последующем материале понятие осевая нагрузка относится к силе, которая действует параллельно начальной неискривленной оси элемента. Считается, что такая сила не изменяет своего направления при движении конструкции.

Пример 1.2. В качестве второго примера вывода уравнений движения для сопряжения жестких тел рассмотрим систему, показанную на рис. 1.8. При небольшой амплитуде движение этой системы может характеризоваться вертикальным перемещением точки приложения нагрузки $Z(t)$, и все силы сопротивления системы выражаются через это перемещение:

$$f_S = k \frac{b}{a} Z(t); \quad f_{I1} = \gamma a b \frac{1}{2} \ddot{Z}(t);$$

$$f_{I2} = \gamma a b \frac{b}{2a} \ddot{Z}(t); \quad M_I = \gamma a b \frac{a^2 + b^2}{12} \frac{1}{a} \ddot{Z}(t).$$

Уравнение колебаний для этой простой системы можно получить непосредственно из условия равновесия моментов относительно шарнира

$$f_S b + f_{I1} \frac{a}{2} + f_{I2} \frac{b}{2} + M_I = p(t) a.$$

После деления на a и подстановки выражений для сил получаем:

$$\gamma ab \left[\frac{1}{12} \left(\frac{b^2}{a^2} + 1 \right) + \frac{1}{4} + \frac{b^2}{4a^2} \right] \ddot{Z}(t) + k \frac{b^2}{a^2} Z(t) = p(t).$$

И, наконец,

$$m^* \ddot{Z}(t) + k^* Z(t) = p^*(t),$$

$$\text{где } m^* = \frac{\gamma ab}{3} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right);$$

$$k^* = k \frac{b^2}{a^2}; \quad p^*(t) = p(t).$$

1.6. ОБОБЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ. СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ УПРУГОСТЬЮ

На рис. 1.5 показан пример действительной системы с одной степенью свободы, несмотря на сложную форму соотношений между отдельными ее компонентами, так как опирание двух жестких стержней допускает только одну схему деформирования. Если бы стержни могли деформироваться при изгибе, то система имела бы бесконечное число степеней свободы. Однако и в этом случае можно применить простой анализ системы с одной степенью свободы, если предположить, что возникает только одна схема прогибов, включающая деформации стержней при изгибе.

В качестве примера анализа методом аппроксимации поведения системы с одной степенью свободы для конструкции, фактически имеющей бесконечное число степеней свободы, рассмотрим вывод уравнений движения для консольной башни, показанной на рис. 1.9. Основными характеристиками этой башни являются ее изгибная жесткость $EI(x)$ и погонная масса $m(x)$. Принято, что она подвергается сейсмическому воздействию $v_g(t)$ и воспринимает постоянную вертикальную нагрузку N , приложенную сверху.

Для аппроксимации движения башни системой с одной степенью свободы необходимо предположить, что ее изгиб происходит только по одной форме. Функцию прогиба примем $\psi(x)$, а амплитуду колебаний в виде обобщенной координаты $Z(t)$. Таким образом,

$$v(x, t) = \psi(x) Z(t). \quad (1.23)$$

Обычно за обобщенную координату принимаются перемещения характерной

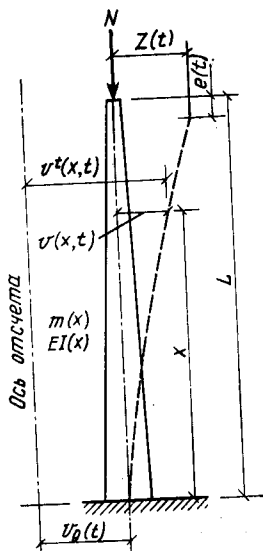


Рис. 1.9. Достаточно сложное сооружение, рассматриваемое как система с одной степенью свободы

точки системы, например перемещения верха башни. Тогда функция для формы изгиба принимается в виде безразмерного отношения перемещения любой точки к перемещению характерной точки.

$$\psi(x) = \frac{v(x, t)}{Z(t)}. \quad (1.24)$$

Уравнения движения обобщенной системы можно получить только с помощью выражения для работы или энергии. Воспользуемся принципом Гамильтона (хотя в равной степени применим принцип возможных перемещений). Кинетическая энергия башни равна:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) [\dot{v}^t(x, t)]^2 dx, \quad (1.25)$$

а потенциальная энергия изгибных деформаций

$$V_f = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) [v''(x, t)]^2 dx, \quad (1.26)$$

$$\text{где } v'' = d^2v/dx^2.$$

Для определения потенциальной энергии осевой силы (которая постоянна по направлению и величине во время динамической реакции и поэтому является консервативной силой) необходимо вычислить вертикальную составляющую движения верхней точки башни $e(t)$. По аналогии с выводом уравнения (г) в примере 1.1 можно показать, что

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [v'(x, t)]^2 dx. \quad (1.27)$$

Таким образом, потенциальная энергия осевой нагрузки равна:

$$V_N = -\frac{N}{2} \int_0^L [v'(x, t)]^2 dx. \quad (1.28)$$

где минус характеризует уменьшение потенциала силы N при увеличении перемещения $e(t)$. Следует отметить, что если осевая нагрузка N изменяется вдоль башни (например, нагрузка от собственного веса конструкции), то выражение (1.28) следует видоизменить, включив величину осевой нагрузки под знак интеграла.

В системе, представленной на рис. 1.9, нет непосредственно приложенной динамической нагрузки и в расчете не учитывается затухание, что исключает наличие неконсервативных сил. Следовательно, принцип Гамильтона можно записать в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt = 0$$

или после подстановки выражений (1.25)—(1.28) и определения вариаций

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L m(x) \dot{v}^t(x, t) \delta \dot{v}^t dx - \int_0^L EI(x) v''(x, t) \delta v'' dx + N \int_0^L v'(x, t) \delta v' dx \right] dt = 0. \quad (1.29)$$

Теперь с учетом зависимостей:

$$\begin{aligned} \dot{v}^t &= \dot{v} + \dot{v}_g; & v'' &= \psi'' Z; & v' &= \psi' Z; & v &= \psi Z; \\ \delta \dot{v}^t &= \delta \dot{v}; & \delta v'' &= \psi'' \delta Z; & \delta v' &= \psi' \delta Z; & \delta v &= \psi \delta Z \end{aligned} \quad (1.30)$$

и после их подстановки в уравнение (1.29) получаем:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{Z} \delta Z \int_0^L m(x) \psi^2 dx + \delta \dot{Z} \dot{v}_g(t) \int_0^L m(x) \psi dx - Z \delta Z \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx + \right. \\ \left. + NZ \delta Z \int_0^L (\psi')^2 dx \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

После интегрирования первых двух членов по частям уравнение принимает форму

$$\int_{t_1}^{t_2} [m_z \ddot{Z} + k^* Z - k_G^* Z - p_{\text{eff}}^*(t)] \delta Z dt = 0, \quad (1.32)$$

где $m^* = \int_0^L m(x) \psi^2 dx$ — обобщенная масса;

$k^* = \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx$ — обобщенная жесткость;

$k_G^* = N \int_0^L (\psi')^2 dx$ — обобщенная геометрическая жесткость; (1.33)

$p_{\text{eff}}^*(t) = -\ddot{v}_g \int_0^L m(x) \psi dx$ — обобщенная эффективная нагрузка.

Так как вариация δZ произвольная, член уравнения (1.32) в квадратных скобках должен равняться нулю. Следовательно, уравнения движения можно записать в форме

$$m^* \ddot{Z}(t) + \bar{k}^* Z(t) = p_{\text{eff}}^*(t), \quad (1.34)$$

где \bar{k}^* — суммарная обобщенная жесткость.

$$\bar{k}^* = k^* - k_G^*. \quad (1.35)$$

Для этой системы критическую нагрузку, вызывающую потерю устойчивости, можно вычислить тем же методом, что и в примере 1.1,

приравнявая нулю суммарную обобщенную жесткость. Таким образом,

$$\bar{k}^* = k^* - k_G^* = \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx - N_{cr} \int_0^L (\psi')^2 dx = 0;$$

$$N_{cr} = \frac{\int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx}{\int_0^L (\psi')^2 dx}. \quad (1.36)$$

Пример 1.3. Рассмотрим числовой пример записи уравнений движения для системы с одной степенью свободы с распределенной изгибной жесткостью применительно к башне (рис. 1.9), которая имеет равномерно распределенные изгибную жесткость и массу по всей длине. Форма ее прогиба при свободных колебаниях принимается в виде

$$\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}. \quad (a)$$

Используя уравнение (1.33), выразим обобщенную массу и жесткость башни:

$$m^* = \int_0^L \bar{m} \psi^2 dx = \bar{m} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0,228 \bar{m} L; \quad (б)$$

$$k^* = \int_0^L EI (\psi'')^2 dx = EI \int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2} \cos \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3}. \quad (в)$$

Если принять, что на башню воздействуют колебания основания, то обобщенная нагрузка из уравнения (1.33) (пренебрегаем знаком минус) будет равна:

$$p_{\text{eff}}^*(t) = \ddot{v}_g(t) \int_0^L \bar{m} \psi dx = \bar{m} \ddot{v}_g(t) \int_0^L \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) dx = 0,364 \bar{m} L \ddot{v}_g(t). \quad (г)$$

Следовательно, если осевая нагрузка не учитывается, то уравнение колебаний этой системы согласно (1.34) имеет вид

$$0,228 \bar{m} L \ddot{Z}(t) + \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3} Z(t) = 0,364 \bar{m} L \ddot{v}_g(t). \quad (д)$$

С учетом осевой силы N обобщенная геометрическая жесткость башни в соответствии с (1.33) равна:

$$k_G^* = N \int_0^L (\psi')^2 dx = N \int_0^L \left(\frac{\pi}{2L} \sin \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{N \pi^2}{8L}. \quad (е)$$

Объединение этого выражения с зависимостью (в) дает суммарную обобщенную жесткость

$$\bar{k}^* = k^* - k_G^* = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} - \frac{N \pi^2}{8L}. \quad (ж)$$

Тогда критическая нагрузка, вызывающая потерю устойчивости башни, определяется из уравнения (ж) приравняв суммарной жесткости нулю:

$$N_{cr} = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \frac{8L}{\pi^2} = \frac{\pi^2 EI}{4 L^2}. \quad (з)$$

В результате получена истинная нагрузка, вызывающая потерю устойчивости консольной колонны при сосредоточенной нагрузке, так как принятая функция формы изгиба (а) соответствует истинной форме изгиба при потере устойчивости. При подстановке выражения (з) в (е) геометрическую жесткость удобно выразить как

$$k_G^* = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \frac{N}{N_{cr}}. \quad (и)$$

Если преобразовать уравнение (д), то уравнение колебаний с учетом осевой нагрузки будет иметь вид

$$0,228 \bar{m} \ddot{Z}(t) + \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right) Z(t) = 0,364 \bar{m} \ddot{v}_g(t). \quad (к)$$

Безусловно, любая другая форма изгиба, соответствующая геометрическим граничным условиям конструкции, может быть принята в качестве $\psi(x)$. Например, если принять, что форма изгиба имеет параболическую форму

$$\psi(x) = x^2/L^2, \quad (л)$$

то обобщенная упругая жесткость

$$k^* = EI \int_0^L \left(\frac{2x}{L^2}\right)^2 dx = \frac{4EI}{L^3},$$

а обобщенная геометрическая жесткость

$$k_G^* = N \int_0^L \left(\frac{2x}{L^2}\right)^2 dx = \frac{4N}{3L}.$$

В этом случае критическая нагрузка, полученная при $k^* = k_G^*$,

$$N_{cr} = \frac{4EI}{L^3} \frac{3L}{4} = \frac{3EI}{L^2}, \quad (м)$$

что на 21% больше, чем действительная величина критической нагрузки в соответствии с выражением (з).

По существу принятие любой другой формы изгиба, отличной от истинной формы при потере устойчивости, удовлетворяет условию наложения на систему дополнительных связей, при которых обеспечивается ее равновесие. Эти внешние связи характеризуют ужесточение системы. Поэтому критическая нагрузка, вычисленная методом Релея с использованием формы изгиба, отличной от истинной, должна быть всегда больше, чем действительная критическая нагрузка. На самом деле, очевидно, параболическая форма изгиба не является удачным приближением для данной конструкции, даже если она удовлетворяет геометрическим граничным условиям, так как постоянство кривизны при этой форме исходит из предпосылки, что изгибающий момент является постоянным по всей ее длине. В рассматриваемой системе изгибающий момент на вершине колонны равен нулю, и принятие формы изгиба с нулевой кривизной в уровне верха башни дало бы гораздо лучшие результаты.

1.7. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ

Как видно из приведенных примеров, уравнения колебаний для любой системы с одной степенью свободы, какой бы сложной она ни была, всегда можно привести к форме

$$m^* \ddot{Z}(t) + c^* \dot{Z}(t) + k^* Z(t) = p^*(t),$$

где $Z(t)$ — единственная обобщенная координата, характеризующая движение системы, а символы со звездочками обозначают обобщенные физические параметры, соответствующие этой координате.

Вообще значения этих обобщенных параметров можно определить путем использования принципа Гамильтона или принципа виртуальных (возможных) перемещений. Однако выражения для этих величин легко получить в стандартной форме, удобной для практического применения.

Рассмотрим произвольную одномерную систему, которая колеблется только по форме, показанной на рис. 1.10, а. Тогда перемещения можно выразить через обобщенную координату $Z(t)$

$$v(x, t) = \psi(x) Z(t).$$

Обобщенные параметры, связанные с этой формой прогиба, можно выразить следующим образом. Для распределения массы, показанной на рис. 1.10, б, обобщенная масса определяется зависимостью

$$m^* = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx + \sum m_i \psi_i^2 + \sum I_{oi} (\psi'_i)^2, \quad (1.37)$$

в которой массы жестких тел представлены суммами, где ψ'_i — угол поворота в точке i .

Обобщенное затухание, определяемое затуханием колебаний в основании и в демпферах, показанных на рис. 1.10, в, равно:

$$c^* = \int_0^L c(x) [\psi(x)]^2 dx + \sum c_i \psi_i^2. \quad (1.38)$$

Обобщенная жесткость, характеризующая упругость основания, изгибную жесткость элементов системы и жесткость пружин (см. рис. 1.10, г), равна:

$$k^* = \int_0^L k(x) [\psi(x)]^2 dx + \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx + \sum k_i \psi_i^2. \quad (1.39)$$

Выражение для геометрической жесткости системы при действии осевой силы (не изменяющейся во времени), показанной на рис. 1.10, д, имеет вид

$$k_G^* = N \int_0^L [\psi'(x)]^2 dx. \quad (1.40)$$

Для более общего случая, когда точка приложения осевой нагрузки перемещается вдоль оси балки, получим

$$k_G^* = \int_0^L N(x) [\psi'(x)]^2 dx. \quad (1.40a)$$

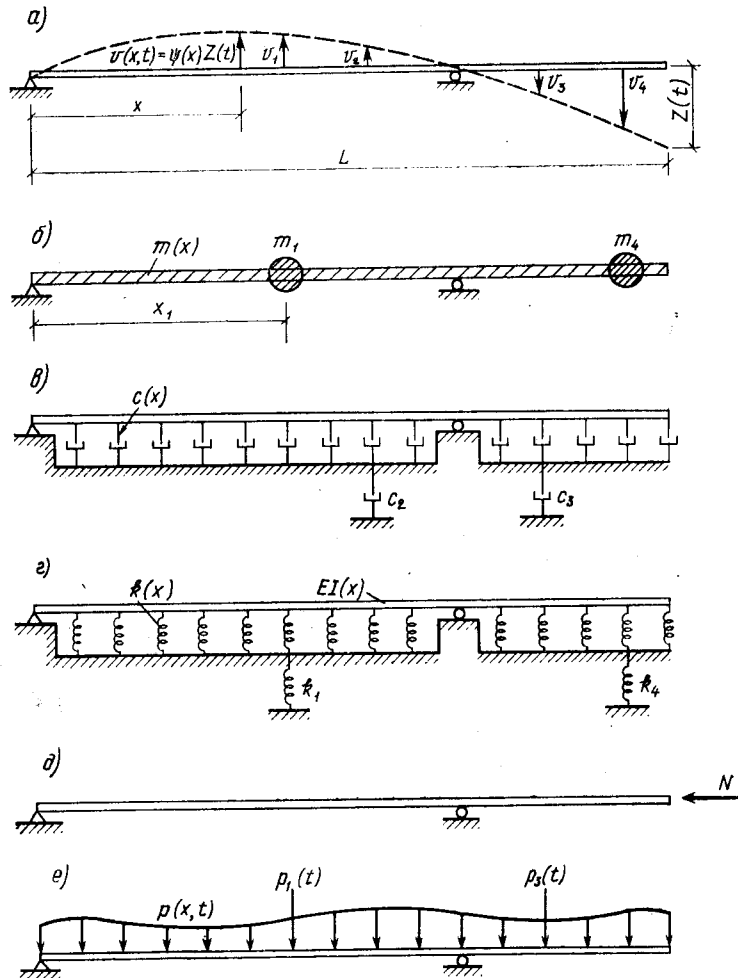


Рис. 1.10. Характеристика обобщенной системы с одной степенью свободы
 а — принятая форма колебаний; б — параметры масс; в — параметры затухания; г — упругие характеристики; д — осевая нагрузка; е — приложенная нагрузка

Наконец, обобщенная сила при поперечной нагрузке, изменяющейся во времени (см. рис. 1.10, е), равна:

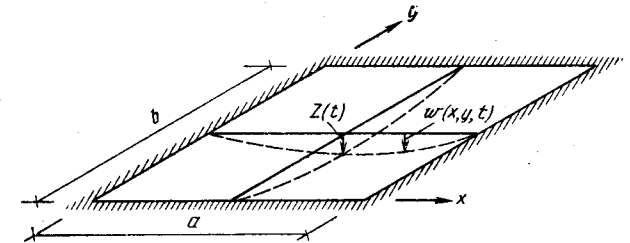
$$p^*(t) = \int_0^L p(x,t) \psi(x) dx + \sum p_i \psi_i. \quad (1.41)$$

Очень важно обращать особое внимание на векторную форму записи сил и перемещений в уравнении (1.41). В уравнение следует включать только составляющие перемещений вдоль направления приложенных нагрузок, а их знаки принимать в соответствии со знаками нагрузок. Другими словами, уравнение (1.41) по существу выражает работу нагрузок при единичном перемещении по обобщенной координате $Z(t)$.

Суммарная обобщенная жесткость равна: $\bar{k}^* = k^* - k_G^*$, как отмечалось ранее [см. выражение (1.35)].

Аналогичные понятия обобщенных координат в равной мере применимы при приведении двумерных систем к системам с одной

Рис. 1.11. Двумерная плита, рассматриваемая как система с одной степенью свободы



степенью свободы. Рассмотрим в качестве примера прямоугольную плиту перекрытия (рис. 1.11). Если предположить, что прогибы этой плиты имеют указанную на рисунке форму, а амплитуда ее перемещений в центре принимается в качестве обобщенной координаты, то прогибы плиты можно выразить в виде

$$w(x,y,t) = \psi(x,y) Z(t). \quad (1.42)$$

Для шарнирно-опертой плиты функция формы изгиба, естественно, может быть принята в виде

$$\psi(x,y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (1.43)$$

Однако можно воспользоваться любой другой функцией, удовлетворяющей граничным условиям на опорах.

Обобщенные характеристики системы можно теперь определить с помощью выражений, эквивалентных соотношениям для одномерного элемента, с интегрированием их по всей поверхности плиты. Например, обобщенная масса будет равна:

$$m^* = \int_A m(x,y) [\psi(x,y)]^2 dA + \sum m_i \psi_i^2. \quad (1.44)$$

Соответствующие выражения для обобщенной жесткости и обобщенной силы имеют вид:

$$k^* = D \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA; \quad (1.45)$$

$$p^* = \int_A p(x,y) \psi(x,y) dA + \sum p_i \psi_i. \quad (1.46)$$

где $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ — цилиндрическая жесткость плиты; $p(x, y)$ — равномерно распределенная нагрузка на плиту; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина плиты.

Очевидно, что те же самые методы можно легко применить к трехмерным системам (таким, как массивы грунта или бетона), принимая соответствующие трехмерные функции перемещений. Однако трудность выбора подходящей формы изгиба увеличивается с повышением размерности системы и, естественно, уменьшается надежность результатов.

ГЛАВА 2

РЕАКЦИЯ СИСТЕМ ПРИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

2.1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

В гл. 1 было показано, что уравнения движения любой системы с одной степенью свободы могут быть приведены к виду

$$m^* \ddot{Z}(t) + c^* \dot{Z}(t) + \bar{k}^* Z(t) = p^*(t).$$

Эта форма полностью эквивалентна уравнению колебаний системы с массой, пружиной и затуханием, показанной на рис. 1.1, которое преобразуется к виду

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = p(t). \quad (2.1)$$

В дальнейшем удобно использовать уравнение (2.1) и наглядно представить реакцию этой простой системы. Однако следует помнить, что эти результаты в полной мере применимы к реакции модели сложной системы, которая рассматривается как система с одной обобщенной степенью свободы.

Для решения уравнения (2.1) сначала рассмотрим однородное уравнение, правая часть которого равна нулю:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = 0. \quad (2.2)$$

Колебания системы при нулевой внешней нагрузке называют *свободными колебаниями*, или *собственными*. Далее мы переходим к анализу реакции системы при свободных колебаниях.

Решение уравнения (2.2) имеет вид

$$v(t) = Ge^{st}. \quad (2.3)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (2.2) дает

$$(ms^2 + cs + k) Ge^{st} = 0. \quad (2.4)$$

После деления на mGe^{st} и введения обозначения

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (2.5)$$

уравнение (2.4) принимает вид:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0. \quad (2.6)$$

Значение s , которое может быть получено из этого уравнения, зависит от c . Таким образом, форма колебаний, описываемых уравнением (2.3), будет зависеть от затухания в системе.

2.2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕЗ УЧЕТА ЗАТУХАНИЯ

Если система недемпфированная, т. е. если $c = 0$, то в уравнении (2.6)

$$s = \pm i\omega. \quad (2.7)$$

Таким образом, реакция системы, характеризуемая уравнением (2.3), может быть представлена в виде выражения

$$v(t) = G_1 e^{i\omega t} + G_2 e^{-i\omega t}, \quad (2.8)$$

в котором два слагаемых соответствуют двум корням s , а постоянные интегрирования G_1 и G_2 характеризуют пока еще произвольные амплитуды колебаний. Уравнение (2.8) можно представить в более удобной форме, используя уравнения Эйлера:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t. \quad (2.9)$$

В результате получаем

$$v(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (2.10)$$

где константы A и B определяются начальными условиями, т. е. перемещением $v(0)$ и скоростью $\dot{v}(0)$ в момент времени $t = 0$, которые вызывают свободные колебания системы.

Очевидно, что $\dot{v}(0) = B$, а $\ddot{v}(0) = A\omega$. Таким образом, уравнение (2.10) принимает вид

$$v(t) = \frac{\dot{v}(0)}{\omega} \sin \omega t + v(0) \cos \omega t. \quad (2.11)$$

Это решение характеризует простое гармоническое движение и графически изображено на рис. 2.1. Величина ω является круговой частотой или угловой скоростью движения. Она измеряется в радианах на единицу времени. Циклическая частота колебаний f выражается соотношением

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (2.12)$$

а обратная ей величина T — период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}. \quad (2.13)$$

Движение, выраженное уравнением (2.11), можно также записать в виде

$$v(t) = \rho \cos(\omega t - \theta). \quad (2.14)$$

Как следует из диаграммы Арганда или векторного представления на рис. 2.2, реакция определяется действительной частью двух вращающихся векторов или их горизонтальной проекцией. Таким образом, амплитуда колебаний характеризуется равнодействующей двух векторов

$$\rho = \sqrt{[v(0)]^2 + \left[\frac{\dot{v}(0)}{\omega}\right]^2}, \quad (2.15)$$

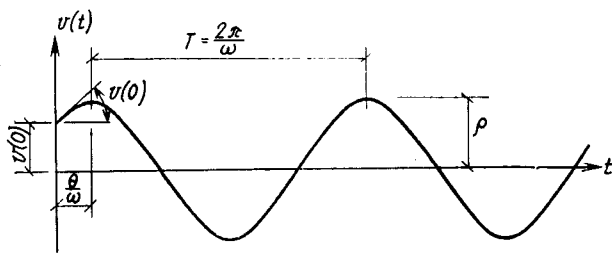


Рис. 2.1. Свободные колебания без учета затухания

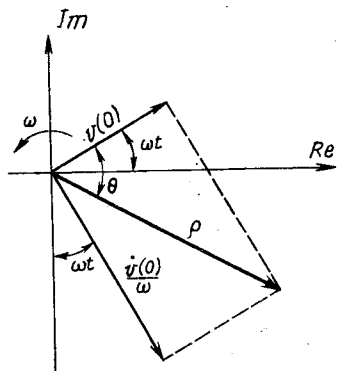


Рис. 2.2. Свободные колебания, представленные в виде вектора вращения

а фазовый угол — величиной

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{\dot{v}(0)}{\omega v(0)}. \quad (2.16)$$

Как следует из рис. 2.2, фазовый угол θ характеризует угловое расстояние, на которое движение равнодействующей отстает от члена при косинусе в выражении реакции системы.

2.3. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ С УЧЕТОМ ЗАТУХАНИЯ

Если в системе присутствует затухание, то решение уравнения (2.6), определяющего реакцию системы, имеет вид

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2}. \quad (2.17)$$

Эта формула характеризует три вида движения в зависимости от знака выражения под квадратным корнем, т. е. если эта величина положительна, отрицательна или равна нулю. Сначала удобно рассмотреть предельный случай, когда выражение под квадратным корнем равно нулю. Этот случай определяет *условие критического затухания*.

2.3.1. Критическое затухание. Если выражение под квадратным корнем в формуле (2.17) становится равным нулю, то очевидно, что $c/2m = \omega$; таким образом, величина критического затухания c_c равна:

$$c_c = 2m\omega. \quad (2.18)$$

В этом случае величина s в выражении (2.17)

$$s = -\frac{c}{2m} = -\omega, \quad (2.19)$$

а реакция в соответствии с уравнением (2.3) равна:

$$v(t) = (G_1 + G_2 t) e^{-\omega t}, \quad (2.20)$$

где второй член умножается на t , так как в решении уравнения присутствует только одно значение s (2.19).

Подстановка начальных условий в уравнение (2.20) приводит к окончательной форме уравнения реакции для случая критического затухания

$$v(t) = [v(0)(1 + \omega t) + \dot{v}(0)t] e^{-\omega t}, \quad (2.21)$$

которая графически изображена на рис. 2.3.

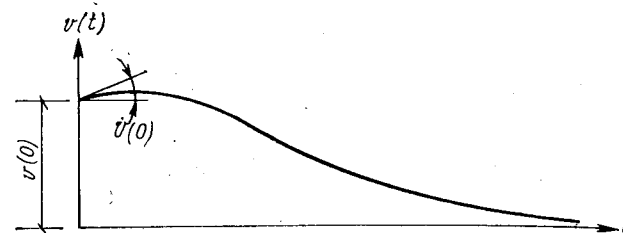


Рис. 2.3. Свободные колебания системы с критическим затуханием

Из рис. 2.3 видно, что реакция при свободных колебаниях системы с критическим затуханием не содержит колебаний относительно положения нулевого перемещения. Напротив, перемещение стремится к нулю в соответствии с членом уравнения (2.21), характеризующим затухание колебаний по экспоненте.

Ценность формулировки состояния системы с критическим затуханием заключается в том, что оно определяет минимальную величину затухания, при котором не происходит колебаний в стадии свободных колебаний реакции системы.

2.3.2. Недодемпфированные системы (с затуханием ниже критического). Если затухание меньше критического, то из уравнения (2.18) видно, что $c < 2m\omega$, и, таким образом, подкоренное выражение в формуле (2.17) должно быть отрицательным. Для определения

реакции при свободных колебаниях в этом случае удобно выразить затухание как отношение c к величине критического затухания c_c , таким образом

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega}, \quad (2.22)$$

в котором ξ называется *параметром затухания*. Подставляя выражение (2.22) в (2.17), получаем $s = -\xi\omega \pm \sqrt{(\xi\omega)^2 - \omega^2}$ или, изменяя знак подкоренного выражения и вводя новое обозначение ω_D , имеем:

$$s = -\xi\omega \pm i\omega_D, \quad (2.23)$$

где

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (2.24)$$

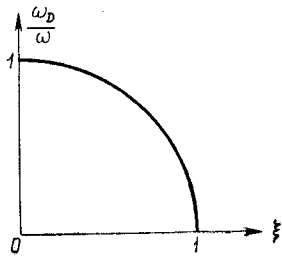


Рис. 2.4. Зависимость между отношением частот собственных колебаний с учетом и без учета затухания и параметром затухания

Величина ω_D называется *частотой демпфированных колебаний, или частотой колебаний с учетом затухания*. Для параметров затухания, характерных для обычных строительных конструкций ($\xi < 20\%$), частота ω_D , как следует из (2.24), очень незначительно отличается от частоты недемпфированных колебаний. Чтобы определить влияние затухания на частоту, следует помнить, что график зависимости отношения частоты колебаний с учетом затухания к частоте незатухающих колебаний ω_D/ω от параметра затухания ξ представляет собой окружность, радиус которой равен единице, как это показано на рис. 2.4.

Путем подстановки выражения (2.23) в (2.3) можно определить реакцию недемпфированной системы при свободных колебаниях

$$\begin{aligned} v(t) &= G_1 e^{-\xi\omega t + i\omega_D t} + G_2 e^{-\xi\omega t - i\omega_D t} = \\ &= e^{-\xi\omega t} (G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t}). \end{aligned}$$

В этом уравнении член в круглых скобках характеризует простое гармоническое движение [сравните с выражением (2.8)]; таким образом, это уравнение можно записать в более удобной форме

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t). \quad (2.25)$$

И, наконец, при введении начальных условий $v(0)$ и $\dot{v}(0)$ можно определить постоянные в (2.25).

Тогда

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{v}(0) + v(0)\xi\omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + \right. \\ &\quad \left. + v(0) \cos \omega_D t \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Это выражение реакции системы можно записать в форме вращающегося вектора

$$v(t) = \rho e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \theta), \quad (2.27)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= \left\{ \left[\frac{\dot{v}(0) + v(0)\xi\omega}{\omega_D} \right]^2 + [v(0)]^2 \right\}^{1/2}; \\ \theta &= \text{tg}^{-1} \frac{\dot{v}(0) + v(0)\xi\omega}{\omega_D v(0)}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

На рис. 2.5 показана реакция недемпфированной системы при начальном перемещении $v(0)$ и нулевой скорости [$\dot{v}(0) = 0$], другими словами, если масса отпущена из стационарного смещен-

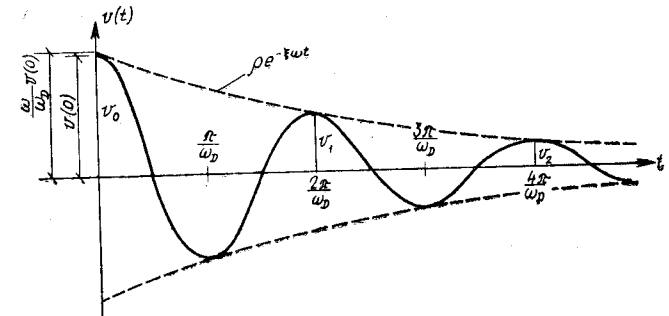


Рис. 2.5. Свободные колебания недемпфированной системы

ного положения. Интересно отметить, что недемпфированная система колеблется с частотой ω_D относительного состояния равновесия. Выражение (2.27), представленное в виде вектора вращения, эквивалентно графику на рис. 2.2 за исключением того, что длина вектора уменьшается по экспоненте по мере затухания реакции.

Природа параметров затухания обычных строительных систем очень сложна, и они трудно определяемы. Однако принято выражать затухание реальных систем в виде эквивалентных коэффициентов вязкого затухания ξ , которые характеризуют скорость затухания амплитуд свободных колебаний. Поэтому установим более точную зависимость между коэффициентом вязкого затухания ξ и реакцией при свободных колебаниях, показанных на рис. 2.5.

Рассмотрим два любых последовательных положительных максимума на рис. 2.5 v_n и v_{n+1} . Из выражения (2.27) отношение этих двух последовательных значений равно:

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \exp\left(2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D}\right). \quad (2.29)$$

Логарифмируя обе части (2.29), получаем логарифмический декремент δ :

$$\delta \equiv \ln \frac{v_n}{v_{n+1}} = 2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D} \quad (2.30)$$

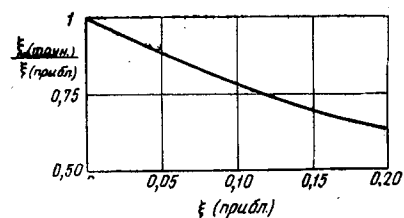


Рис. 2.6. Поправочный коэффициент на затухание, который следует вводить при расчете по уравнению (2.34)

или с учетом выражения (2.24)

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.31)$$

При небольшом затухании формулу (2.31) можно приближенно заменить

$$\delta \approx 2\pi\xi \quad (2.32)$$

В этом случае зависимость (2.29) можно выразить в виде ряда

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = e^\delta \approx e^{2\pi\xi} = 1 + 2\pi\xi + \frac{(2\pi\xi)^2}{2!} + \dots \quad (2.33)$$

Для небольших значений ξ достаточную точность можно получить сохранением только первых двух членов ряда. Тогда

$$\xi \approx \frac{v_n - v_{n+1}}{2\pi v_{n+1}} \quad (2.34)$$

Для иллюстрации точности выражения (2.34) отношение точного значения ξ , определенного по формуле (2.30), к приближенному значению в соответствии с (2.34) изображено в функции приближенной величины на рис. 2.6. Этот график дает возможность исправить коэффициент затухания, полученный приближенным методом.

Для слабо демпфированных систем при вычислении параметра затухания большую точность можно получить, рассматривая пики реакции, находящиеся на расстоянии нескольких периодов друг от друга, например m периодов. Тогда

$$\ln \frac{v_n}{v_{n+m}} = 2m\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D} \quad (2.35)$$

которое может быть выражено для очень малого затухания приближенным соотношением

$$\xi = \frac{v_n - v_{n+m}}{2m\pi v_{n+m}} \quad (2.36)$$

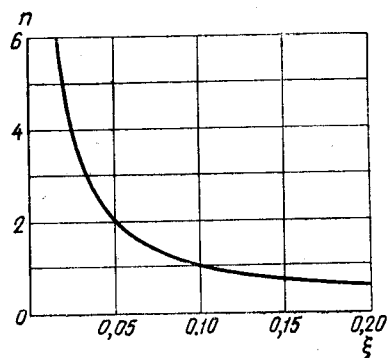


Рис. 2.7. Зависимость параметра затухания ξ от числа циклов n , необходимых для уменьшения амплитуды колебаний на 50%

При экспериментальной оценке параметров затухания по свободным колебаниям демпфированных систем более удобно пользоваться методом, который заключается в определении числа циклов, в течение которых амплитуда колебаний уменьшается в два раза. Зависимость для использования в этом случае показана на рис. 2.7. Удобно для приближенных оценок пользоваться следующим эмпирическим правилом: уменьшение амплитуды колебаний на 50% за один цикл происходит при затухании 10% от критического.

2.3.3. Передемпфированные системы (с затуханием больше критического). Хотя в обычных условиях строительные системы, имеющие затухание больше критического, не встречаются, для полноты исследования полезно рассмотреть анализ реакции передемпфированной системы. В этом случае $\xi > 1$, и выражение (2.17) можно представить в виде

$$s = -\xi\omega \pm \omega \sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi\omega \pm \hat{\omega} \quad (2.37)$$

где

$$\hat{\omega} = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}.$$

Подстановка выражения (2.37) в (2.3) позволяет после преобразований получить

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} (A \operatorname{sh} \hat{\omega} t + B \operatorname{ch} \hat{\omega} t). \quad (2.38)$$

Здесь константы A и B можно вычислить с учетом начальных условий. Из формулы (2.38) видно, что движение передемпфированной системы не является колебательным. Оно аналогично реакции системы с критическим затуханием (см. рис. 2.2), но возврат в нейтральное положение замедляется с ростом параметра затухания.

Пример 2.1. Расчетная схема одноэтажного здания представляет собой жесткий ригель на невесомых колоннах (рис. 2.8). Для определения динамических характеристик этой конструкции было проведено экспериментальное исследование свободных колебаний с помощью отклонения верха модели горизонтальным домкратом с внезапным освобождением.

Во время нагружения домкратом зафиксировано, что перемещение ригеля на 0,2 дюйма (0,51 см) достигается при нагрузке 20 килофунтов (9,06 тс). После мгновенного снятия нагрузки при этом первоначальном смещении максимальное перемещение в обратном направлении составляет только 0,16 дюйма (примерно 0,41 см), а период этого цикла перемещения $T = 1,4$ с.

Из этих данных нужно определить следующие динамические характеристики системы:

1. Нагрузку от приведенного веса ригеля

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{kg}} = 1,4 \text{ с},$$

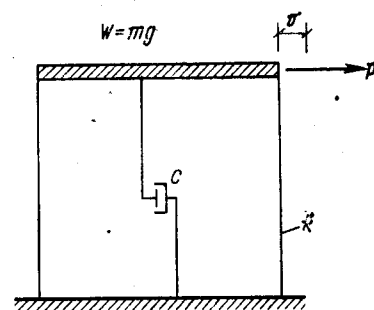


Рис. 2.8. Вибрационные испытания одноэтажного здания (p — нагрузка от домкрата; k — общая жесткость)

отсюда

$$W = \left(\frac{1,4}{2\pi}\right)^2 kg = \begin{cases} 0,0496 \frac{20}{0,2} 336 = 1920 \text{ киллофунтов;} \\ 0,0496 \frac{9,06}{0,51} 980 = 870 \text{ тс.} \end{cases}$$

2. Частоту колебаний

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,4} = 0,714 \text{ Гц;} \\ \omega = 2\pi f = 4,48 \text{ рад/с.}$$

3. Характеристики затухания:
Логарифмический декремент

$$\delta = \begin{cases} \ln \frac{0,2}{0,16} = 0,223 \\ \ln \frac{0,51}{0,41} = 0,223. \end{cases}$$

Параметр затухания

$$\xi \approx \delta/2\pi = 3,55 \%$$

Коэффициент затухания

$$c = \xi c_e = \xi 2m\omega = \begin{cases} 0,0355 \frac{2 \cdot 1920}{386} 4,48 = 1,584 \text{ киллофунтов/(дюйм \cdot с);} \\ 0,0355 \frac{2 \cdot 870}{980} 4,48 = 0,282 \text{ тс/(см \cdot с).} \end{cases}$$

Частота колебаний с учетом затухания

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = \omega (0,999)^{1/2} \approx \omega.$$

4. Амплитуду после шести циклов

$$v_6 = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^6 v_0 = \begin{cases} (4/5)^6 0,2 = 0,0524 \text{ дюйма;} \\ (4/5)^6 0,51 = 0,133 \text{ см.} \end{cases}$$

ГЛАВА 3

РЕАКЦИЯ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

3.1. НЕДЕМПФИРОВАННАЯ СИСТЕМА

3.1.1. Решение однородного уравнения. Теперь предположим, что на систему (см. рис. 1.1, а) действует гармонически изменяющаяся нагрузка $p(t)$ с амплитудой p_0 и круговой частотой $\bar{\omega}$. В этом случае дифференциальное уравнение движения принимает вид

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + kv(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t. \quad (3.1)$$

Прежде чем приступить к рассмотрению общего случая с затуханием, целесообразно подробно остановиться на реакции недемпфированной системы при гармоническом нагружении, для которой уравнение колебаний имеет следующий вид:

$$m \ddot{v}(t) + kv(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t. \quad (3.2)$$

Решением однородного уравнения является реакция сооружения при свободных колебаниях [см. (2.10)]

$$v_c(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (3.3)$$

3.1.2. Частное решение. Общее решение включает также частное решение неоднородного уравнения, т. е. реакцию системы, являющуюся результатом действия динамической нагрузки. Можно принять, что реакция при гармонической нагрузке гармоническая и имеет фазу, одинаковую с нагрузкой. Таким образом,

$$v_p(t) = G \sin \bar{\omega} t, \quad (3.4)$$

где G — амплитуда, подлежащая определению.

Подстановка выражения (3.4) в уравнение (3.2) дает

$$-m\bar{\omega}^2 G \sin \bar{\omega} t + k G \sin \bar{\omega} t = p_0 \sin \bar{\omega} t. \quad (3.5)$$

Делением на $\sin \bar{\omega} t$ (который, как правило, не равен нулю) и на $k/m = \omega^2$ и после некоторых преобразований можно получить

$$G \left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}\right) = \frac{p_0}{k}, \quad (3.6)$$

Следовательно, амплитуда реакции равна:

$$G = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad (3.7)$$

где β — отношение частоты приложенной нагрузки к частоте собственных (свободных) колебаний системы

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}. \quad (3.8)$$

3.1.3. Общее решение. Общее решение уравнения при гармоническом воздействии на недемпфированную систему получается путем объединения решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения при G , равной величине, определяемой уравнением (3.7).

Таким образом,

$$v(t) = v_c(t) + v_p(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \bar{\omega} t. \quad (3.9)$$

В этом уравнении значения A и B все еще зависят от начальных условий. Для системы, колебания которой начинаются из состоя-

ния покоя, т. е. при нулевых начальных условиях $v(0) = \dot{v}(0) = 0$, легко показать, что постоянные принимают следующие значения:

$$A = -\frac{p_0 \beta}{k} \frac{1}{1-\beta^2}, \quad B = 0. \quad (3.10)$$

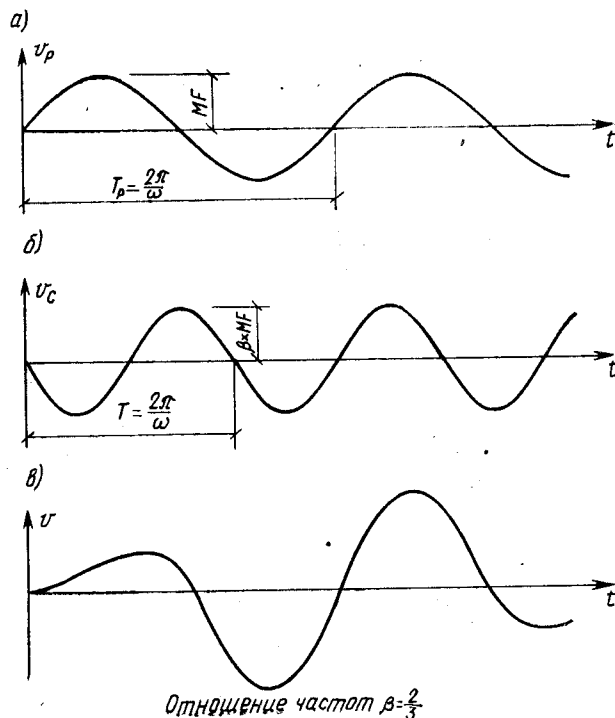


Рис. 3.1. Относительный параметр реакции при гармонической нагрузке и нулевых начальных условиях
а — установившийся режим; б — переходной режим; в — общий параметр реакции $R(t)$

Тогда реакция, определяемая уравнением (3.9), принимает форму

$$v(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t), \quad (3.11)$$

где $p_0/k = v_{st}$ — статическое перемещение, т. е. перемещение, вызываемое статическим приложением нагрузки p_0 ; $1/(1-\beta^2)$ — коэффициент усиления, характеризующий эффект динамического усиления гармонического воздействия (MF);

$\sin \bar{\omega} t$ — составляющая реакции, имеющая частоту приложенной нагрузки, т. е. установившаяся реакция, непосредственно определяемая нагрузкой; $\beta \sin \omega t$ — составляющая реакции, имеющая частоту собственных колебаний, т. е. результат свободных колебаний, вызванных начальными условиями.

Ввиду того что в практических случаях затухание приводит к последовательному уменьшению последнего члена уравнения, его называют *переходной реакцией*. Безусловно, для гипотетической недемпфированной системы эта компонента реакции не может исчезнуть и будет существовать бесконечно долгое время.

3.1.4. Относительный параметр реакции. Удобной величиной, отражающей влияние динамического характера нагружения, является относительный параметр реакции $R(t)$, представляющий собой отношение динамической реакции к перемещению от статического приложения той же нагрузки:

$$R(t) = \frac{v(t)}{v_{st}} = \frac{v(t)}{p_0/k}. \quad (3.12)$$

Из выражения (3.11) видно, что относительный параметр реакции при гармоническом нагружении недемпфированной системы, имеющей начальное состояние покоя, равен:

$$R(t) = \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t). \quad (3.13)$$

Интересно более подробно рассмотреть этот параметр реакции с помощью графиков. На рис. 3.1, а представлена составляющая параметра реакции в установившемся режиме. На рис. 3.1, б показан так называемый переходной процесс — свободные колебания, вызванные начальными условиями. В данном примере принято, что $\beta = 2/3$, т. е. частота приложенной нагрузки составляет $2/3$ частоты свободных колебаний. Общий относительный параметр реакции $R(t)$ в виде суммы двух этих компонент приведен на рис. 3.1, в. Следует обратить внимание на два момента: тенденцию этих двух составляющих войти в фазу, а затем выйти из нее, что приводит к появлению в реакции эффекта биения, и нулевой угол наклона реакции при $t = 0$, показывающий, что скорость члена переходной реакции достаточна для погашения скорости установившегося процесса и таким образом удовлетворяются заданные начальные условия.

3.2. ДЕМПФИРОВАННАЯ СИСТЕМА

Возвращаясь к уравнению движения с учетом затухания (3.1), после деления на m и с учетом $c/m = 2\xi\omega$ получаем:

$$\ddot{v}(t) + 2\xi\omega \dot{v}(t) + \omega^2 v(t) = \frac{p_0}{m} \sin \bar{\omega} t. \quad (3.14)$$

Решением однородного уравнения являются свободные колебания демпфированной системы [см. (2.25)]. Предполагается, что система имеет затухание ниже критического, как это бывает во всех реальных сооружениях:

$$v_c(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t). \quad (3.15)$$

Частное решение при гармоническом нагружении определяется выражением

$$v_p(t) = G_1 \sin \bar{\omega} t + G_2 \cos \bar{\omega} t, \quad (3.16)$$

в которое введено второе слагаемое, так как реакция демпфированной системы обычно не находится в одной фазе с функцией нагрузки.

Подставляя уравнение (3.16) в уравнение (3.14) и отделяя коэффициенты при $\sin \bar{\omega}t$ от коэффициентов при $\cos \bar{\omega}t$, получаем:

$$[-G_1 \bar{\omega}^2 - G_2 \bar{\omega} (2\xi\omega) + G_1 \omega^2] \sin \bar{\omega}t = \frac{p_0}{m} \sin \bar{\omega}t, \quad (3.17a)$$

$$[-G_2 \bar{\omega}^2 + G_1 \bar{\omega} (2\xi\omega) + G_2 \omega^2] \cos \bar{\omega}t = 0. \quad (3.17b)$$

Эти два соотношения должны удовлетворяться раздельно, потому что синусы и косинусы равны нулю в разные моменты времени. После деления обоих соотношений на ω^2 , их преобразования и сокращения тригонометрических выражений получаем:

$$G_1 (1 - \beta^2) - G_2 (2\xi\beta) = \frac{p_0}{k}; \quad G_2 (1 - \beta^2) + G_1 (2\xi\beta) = 0. \quad (3.18)$$

Совместное решение этих уравнений приводит к выражениям для коэффициентов:

$$G_1 = \frac{p_0}{k} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}; \quad (3.19)$$

$$G_2 = \frac{p_0}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}.$$

После их подстановки в частное решение уравнения (3.16) и суммирования с общим решением однородного уравнения получаем общее решение в виде

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) + \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2) \sin \bar{\omega}t - 2\xi\beta \cos \bar{\omega}t]. \quad (3.20)$$

Первый член уравнения (3.20) характеризует переходной процесс при внешнем нагружении. Постоянные A и B могут быть вычислены для любых заданных начальных условий. Первый член приближается к нулю и обычно не представляет большого интереса. Поэтому его определение здесь не приводится. Второй член уравнения (3.20) характеризует установившийся процесс реакции при действии нагрузки, которая не совпадает по фазе с реакцией. Перемещение при установившемся процессе может быть изображено в виде двух векторов на диаграмме Арганда (рис. 3.2). Результирующий вектор ρ представляет собой амплитуду реакции установившегося процесса

$$\rho = \frac{p_0}{k} [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-1/2}, \quad (3.21)$$

а фазовый угол θ — угол, на который реакция отстает от приложенной нагрузки

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}. \quad (3.22)$$

При этом подразумевается, что фазовый угол ограничен пределами $0 < \theta < 180^\circ$. Таким образом, установившаяся реакция может быть представлена в виде

$$v(t) = \rho \sin(\bar{\omega}t - \theta). \quad (3.23)$$

Отношение суммарной амплитуды реакции к статическому перемещению, вызванному силой p_0 , называется динамическим коэффициентом, или коэффициентом динамичности, D :

$$D \equiv \frac{\rho}{p_0/k} = [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-1/2}. \quad (3.24)$$

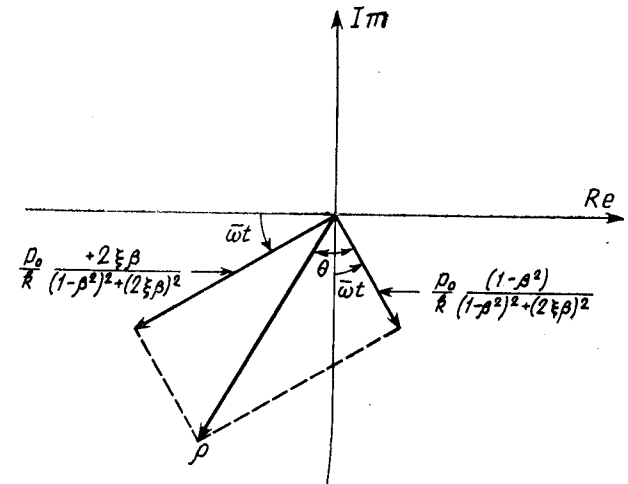


Рис. 3.2. Перемещения системы в установившемся режиме.

Интересно также рассмотреть равновесие сил, приложенных к массе, при установившемся процессе ее колебаний. Компоненты сил удобно выразить через динамический коэффициент и изобразить их на диаграмме Арганда (рис. 3.3). Отметим, что сила упругости направлена противоположно вектору результирующих перемещений (см. рис. 3.2). Аналогично силы затухания и инерции направлены противоположно векторам соответственно скорости и ускорения. И, наконец, результирующая этих сил в точности уравновешивается приложенной нагрузкой p_0 , как следует из условия динамического равновесия.

Из уравнения (3.24) следует, что динамический коэффициент D изменяется в зависимости от отношения частот β и параметра затухания ξ . Графически эти зависимости показаны на рис. 3.4. Фазовый угол θ , как следует из уравнения (3.22), также зависит от этих величин, и его изменение показано на рис. 3.5.

Пример 3.1. Переносная вибрационная машина позволяет эффективно определить динамические характеристики сооружения в натуральных условиях. Включая вибромашину при двух различных частотах и измеряя результирующие амплитуды и фазовые углы для динамической реакции, можно опре-

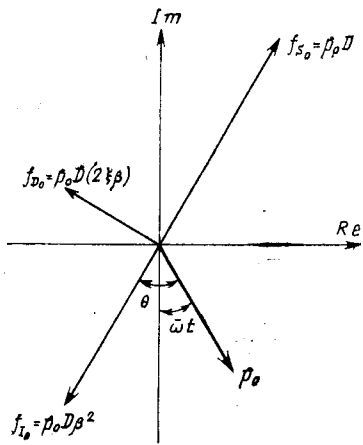


Рис. 3.3. Равновесие сил в установившемся режиме

делить массу, затухание и жесткость системы с одной степенью свободы. При подобных исследованиях одноэтажного здания частоты вибромашины составляли $\omega_1 = 16$ рад/с и $\omega_2 = 25$ рад/с и амплитуда инерционной силы 500 фунтов (226,5 кгс). Амплитуды реакции и фазовые углы, измеренные для этих двух случаев, составляли:

$$\rho_1 = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ дюйм } (18,3 \cdot 10^{-3} \text{ см}); \theta_1 = 15^\circ; \cos \theta_1 = 0,966; \sin \theta_1 = 0,259;$$

$$\rho_2 = 14,5 \cdot 10^{-3} \text{ дюйм } (36,83 \cdot 10^{-3} \text{ см}); \theta_2 = 55^\circ; \cos \theta_2 = 0,574; \sin \theta_2 = 0,819.$$

Для определения динамических характеристик по этим данным удобнее представить выражение (3.21) в виде

$$\rho = \frac{\rho_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \left\{ \frac{1}{1+[2\xi\beta/(1-\beta^2)]^2} \right\}^{1/2} = \frac{\rho_0 \cos \theta}{k(1-\beta^2)}, \quad (a)$$

где тригонометрическая функция определяется выражением (3.22).

После алгебраических преобразований получаем:

$$k(1-\beta^2) = k - \bar{\omega}^2 m = \frac{\rho_0 \cos \theta}{\rho}.$$

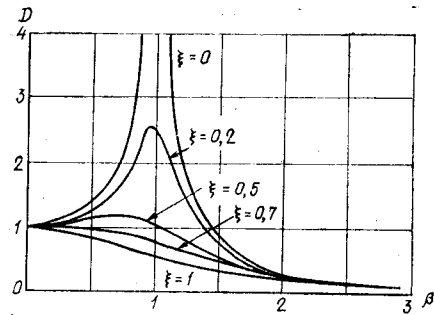


Рис. 3.4. Изменение динамического коэффициента в зависимости от затухания и частоты возбуждения

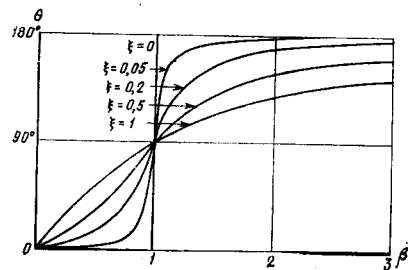


Рис. 3.5. Изменение фазового угла в зависимости от затухания и частоты возбуждения

Использование результатов эксперимента приводит к матричному уравнению

$$\begin{bmatrix} 1 & -16^2 \\ 1 & -25^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{cases} 500 \begin{bmatrix} 0,966 \\ 7,2 \cdot 10^{-3} \\ 0,574 \\ 14,5 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \text{ фунт} \\ 226,5 \begin{bmatrix} 0,966 \\ 18,3 \cdot 10^{-3} \\ 0,574 \\ 36,83 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \text{ кгс,} \end{cases}$$

решение которого дает:

$$k = 100 \times 10^3 \text{ фунт/дюйм } [17,86 \cdot 10^3 \text{ кгс/см};$$

$$m = 128,5 \text{ фунт} \cdot \text{с}^2/\text{дюйм } [22,92 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{см};$$

$$W = mg = 49,6 \cdot 10^3 \text{ фунт } [22,5 \cdot 10^3 \text{ кгс}].$$

Отсюда частота собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 27,9 \text{ рад/с.}$$

Для определения коэффициента затухания два выражения для $\cos \theta$ могут быть получены из выражений (a) и (3.22). Приравняв их, получим значение коэффициента затухания

$$\xi = \frac{\rho_0 \sin \theta}{2\beta k \rho} = \frac{\rho_0 \sin \theta}{c_c \bar{\omega} \rho}.$$

Таким образом, по результатам первого испытания

$$c = \xi c_c = \begin{cases} \frac{500 \cdot 0,259}{16 \cdot 7,2 \cdot 10^{-3}} = 1125 \text{ фунт} \cdot \text{с/дюйм}; \\ \frac{226,5 \cdot 0,259}{16 \cdot 18,3 \cdot 10^{-3}} = 200,4 \text{ кгс} \cdot \text{с/см}. \end{cases}$$

Аналогичный результат в пределах точности логарифмической линейки может быть получен при втором испытании. Таким образом, параметр затухания в процентах от критического равен:

$$\xi = \frac{c}{2k/\omega} = \begin{cases} \frac{1125 \cdot 27,9}{200 \cdot 10^{-3}} = 15,7\%; \\ \frac{200,4 \cdot 27,9}{2 \cdot 17,86 \cdot 10^{-3}} = 15,7\%. \end{cases}$$

3.3. РЕЗОНАНСНЫЙ РЕЖИМ

Из рис. 3.4 видно, что максимум установившегося процесса для слабо демпфированных систем возможен при отношении частот, близком к единице. Условие, когда отношение частот равно единице, т. е. когда частота приложенной нагрузки равна частоте собст-

венных колебаний, называется *резонансом*. Из уравнения (3.13) также видно, что установившаяся реакция системы без затухания при резонансе стремится к бесконечности. Более общий результат может быть получен из уравнения (3.24), которое показывает, что при резонансе ($\beta = 1$) динамический коэффициент обратно пропорционален параметру затухания

$$D_{\beta=1} = 1/2\xi. \quad (3.25)$$

Однако, будучи близким к максимуму, он не характеризует максимум реакции системы с затуханием. Отношение частот для максимума реакции может быть найдено дифференцированием уравнения (3.24) по β и приравниванием производной нулю. Для обычных сооружений, имеющих параметры затухания $\xi < 1/\sqrt{2}$, отношение частот $\beta_{\text{лик}}$, при котором наблюдается максимум реакции, равно

$$\beta_{\text{лик}} = \sqrt{1-\xi^2}, \quad (3.26a)$$

и соответствующий коэффициент динамичности

$$D_{\text{макс}} = \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}}. \quad (3.26b)$$

Для обычных параметров затухания различие между выражением (3.26b) и более простым (3.25) пренебрежимо мало.

Для более полного понимания природы реакции систем при резонансе в случае гармонического нагружения необходимо рассмотреть общее уравнение реакции (3.20), которое включает слабое, характеризующее как переходной режим, так и стационарный режим. В резонансном режиме ($\beta = 1$) это уравнение принимает вид

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) - \frac{p_0}{k} \frac{\cos \omega t}{2\xi}. \quad (3.27)$$

Предполагая нулевые начальные условия [$\dot{v}(0) = v(0) = 0$], получаем:

$$A = \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{2\omega_D} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}}; \quad (3.28)$$

$$B = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi}.$$

Таким образом,

$$v(t) = \frac{1}{2\xi} \frac{p_0}{k} \left[e^{-\xi\omega t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D t + \cos \omega_D t \right) - \cos \omega t \right]. \quad (3.29)$$

Для параметров затухания, обычных для строительных конструкций, член при синусе в этом уравнении будет оказывать небольшое влияние на амплитуду реакции. Кроме того, частота системы с учетом затухания практически равна частоте недемпфированной систе-

мы. В этом случае относительный параметр реакции приближенно равен:

$$R(t) = \frac{v(t)}{p_0/k} \approx \frac{1}{2\xi} (e^{-\xi\omega t} - 1) \cos \omega t. \quad (3.30)$$

При нулевом затухании уравнение (3.29) становится неопределенным, однако после применения правила Лопиталья параметр реакции недемпфированной системы равен:

$$R(t) = 1/2 (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t). \quad (3.31)$$

Зависимости (3.30) и (3.31), показанные на рис. 3.6, иллюстрируют возрастание реакции при резонансном возбуждении систем с затуханием и без затухания. Для обоих случаев резонансные параметры постепенно возрастают. Для недемпфированной системы резонанс продолжает увеличиваться на величину π для каждого цикла колебаний. Это может привести к расстройству системы, если частота возбуждения не изменится. С другой стороны, влияние затухания на пределы ограничения амплитуды резонансных колебаний иллюстрируется нижним рисунком. Число циклов, за которое амплитуда демпфированной системы практически достигает максималь-

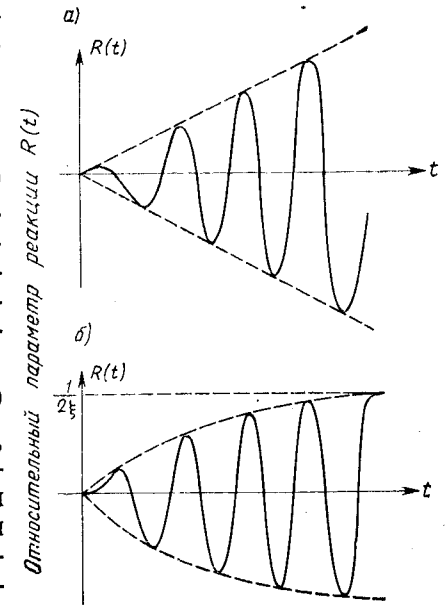


Рис. 3.6. Реакция при резонансной нагрузке $\beta=1$ и нулевых начальных условиях в системах:

а — без затухания; б — с затуханием

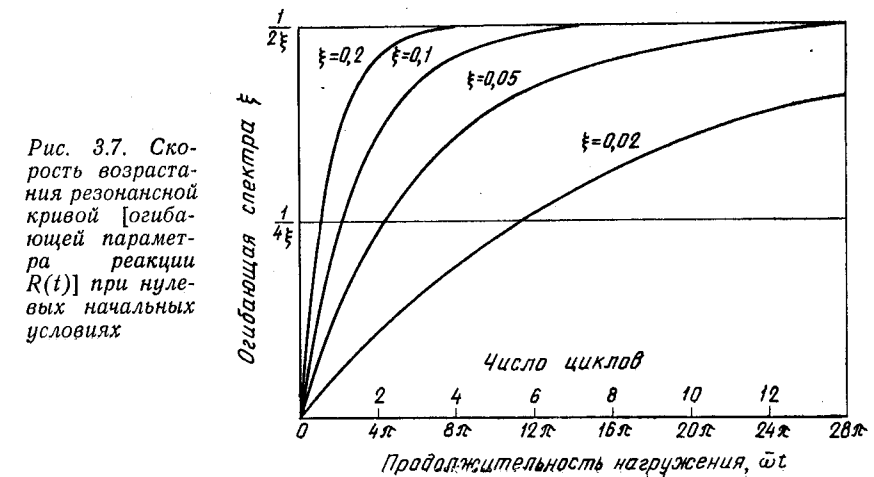


Рис. 3.7. Скорость возрастания резонансной кривой [огивающей параметра реакции $R(t)$] при нулевых начальных условиях

ной величины, зависит от параметра затухания. Кривые, характеризующие возрастание огибающей амплитуд (пунктирные линии на рис. 3.6), показаны для нескольких значений параметра затухания на рис. 3.7 в функции числа резонансных циклов. Отметим, что для достижения практически максимальной резонансной амплитуды требуется всего несколько циклов возбуждения.

3.4. АКСЕЛЕРОМЕТРЫ И ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим основные принципы, на которых построен важный класс динамических измерительных приборов. К ним относятся сейсмические приборы, которые имеют сильно демпфированный осцил-

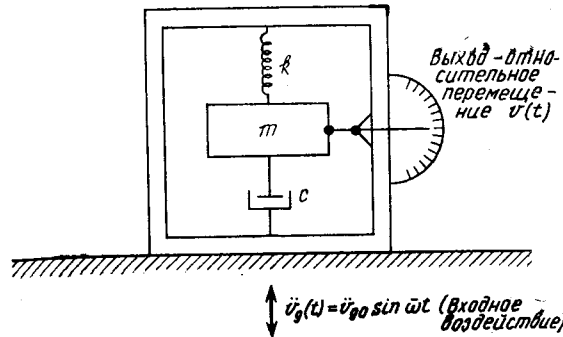


Рис. 3.8. Схема типового сейсмометра

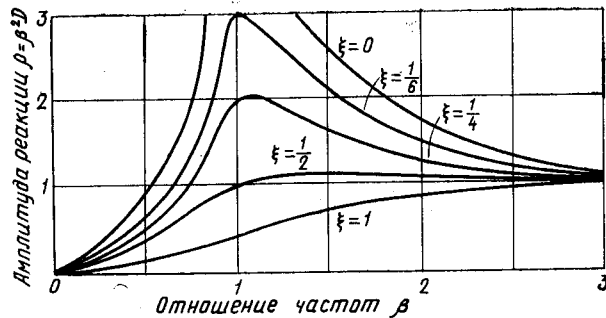


Рис. 3.9. Реакция сейсмометра при гармоническом перемещении основания

лятор (рис. 3.8). Приборы устанавливаются в зданиях на конструкции, колебания которой измеряются. Реакция системы выражается величинами колебаний массы относительно конструкции здания.

Уравнение колебаний такой системы имеет вид (1.21)

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = -m\ddot{v}_g(t) \equiv p_{eff}(t).$$

Если прибор установлен на основании, которое совершает гармонические колебания с амплитудой ускорений $\ddot{v}_g(t) = \ddot{v}_{g0} \sin \omega t$, то эффективная нагрузка равна: $p_{eff}(t) = -m\ddot{v}_{g0} \sin \omega t$. Установив-

шаяся динамическая реакция системы характеризуется амплитудой в соответствии с (3.21).

$$\rho = \frac{m\ddot{v}_{g0}}{k} D, \quad (3.32)$$

где D определяется соотношением (3.24) и графически представлено на рис.3.4.

Анализ рисунка показывает, что при параметре затухания $\xi = 0,7$ величина D практически постоянна для интервала частот $0 < \beta < 0,6$. Из (3.32) следует, что реакция, фиксируемая этим прибором, будет прямо пропорциональна амплитуде ускорения основания при частотах до 0,6 частоты собственных колебаний прибора. Таким образом, прибор рассмотренного типа при надлежащем демпфировании будет эффективно работать как акселерометр при сравнительно низких частотах. Область его применения может быть расширена путем увеличения частоты собственных колебаний по отношению к частоте воздействия, т. е. повышения жесткости пружины. Это основной принцип работы акселерометров при сейсмических воздействиях.

Рассмотрим реакцию того же прибора при гармоническом перемещении основания $v_g = v_{g0} \sin \omega t$. В этом случае ускорение равно: $\ddot{v}_g = -\omega^2 v_{g0} \sin \omega t$, а эффективная нагрузка $p_{eff}(t) = m\omega^2 \times v_{g0} \sin \omega t$. Тогда в соответствии с (3.21) амплитуда реакции равна:

$$\rho = \frac{m\omega^2 v_{g0}}{k} D = v_{g0} \beta^2 D. \quad (3.33)$$

График функции реакции $\beta^2 D$ показан на рис. 3.9, из которого следует, что величина $\beta^2 D$ практически постоянна при $\beta > 1$ и параметре затухания $\xi = 0,5$. Таким образом, реакция соответствующим образом демпфированного прибора практически пропорциональна амплитуде перемещений основания при высокочастотных воздействиях, т. е. он будет работать как измеритель перемещений. Область его применения в этих целях может быть расширена уменьшением частоты собственных колебаний или, другими словами, уменьшением жесткости пружины либо увеличением массы.

3.5. ВИБРОИЗОЛЯЦИЯ

Хотя вопросы виброизоляции достаточно обширны, чтобы быть рассмотренными подробно в данной работе, важно отметить, что основной ее принцип тесно связан с принципом работы сейсмических приборов. Два различных типа задач могут возникнуть в связи с задачами виброизоляции: 1) рабочее оборудование может создавать вибрационные нагрузки, которые вызывают ощутимые колебания несущей конструкции, и 2) чувствительные приборы могут быть установлены на колеблющемся сооружении.

Первый случай показан на рис. 3.10. Вибрационная машина создает переменную вертикальную нагрузку $p_0 \sin \bar{\omega} t$ в связи с неуравновешенностью ее вращающихся частей. Если вибромашина установлена на сооружении, рассматриваемом как система с одной степенью свободы с пружиной и демпфером, то ее перемещение в стационарном режиме равно:

$$v(t) = \frac{p_0}{k} D \sin(\bar{\omega} t - \theta), \quad (3.34)$$

где D определяется соотношением (3.24).

Таким образом, сила противодействия, развиваемая пружиной основания, равна:

$$f_S = kv(t) = p_0 D \sin(\bar{\omega} t - \theta).$$

При этом скорость перемещения относительно основания

$$\dot{v}(t) = \frac{p_0}{k} D \bar{\omega} \cos(\bar{\omega} t - \theta),$$

а диссипативная сила

$$f_D = c\dot{v}(t) = \frac{cp_0 D \bar{\omega}}{k} \cos(\bar{\omega} t - \theta) = 2\xi\beta p_0 D \cos(\bar{\omega} t - \theta).$$

Поскольку эта сила направлена под углом 90° к упругой силе пружины, амплитуда силы f в основании

$$f_{\max} = (f_{S,\max}^2 + f_{D,\max}^2)^{1/2} = p_0 D [1 + (2\xi\beta)^2]^{1/2}.$$

Отношение максимальной силы к амплитуде приложенной нагрузки, которое известно как *передаточное число* TR поддерживающей системы, равно:

$$TR \equiv \frac{f_{\max}}{p_0} = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}. \quad (3.35)$$

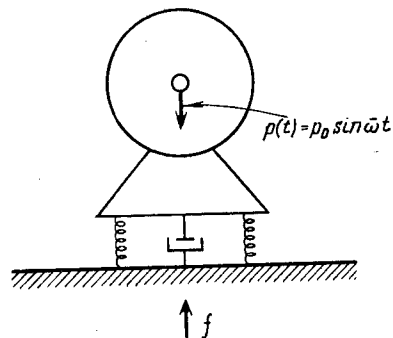


Рис. 3.10. Одномассовая система виброизоляции при внешнем нагружении

Зависимость передаточного числа от отношения частот и параметра затухания показана на рис. 3.11. Хотя данный график напоминает график на рис. 3.4, все кривые проходят через точку с абсциссой $\beta = \sqrt{2}$. Это отличие от рис. 3.4 объясняется влиянием силы затухания. В соответствии с этой характеристикой затухания снижает эффективность системы виброизоляции при частотах выше критического значения β .

Второй случай системы виброизоляции проиллюстрирован на рис. 3.12. Изолируемая масса m поддерживается системой из пружины и демпфера на фундаментной плите, которая подвержена вертикальным колебаниям. Перемещение массы относительно основания равно [см. (3.33)]:

$$v(t) = v_{g0} \beta^2 D \sin(\bar{\omega} t - \theta). \quad (3.36)$$

Когда движение основания векторно суммируется с $v(t)$, общее перемещение массы равно:

$$v^t(t) = v_{g0} \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} D \sin(\bar{\omega} t - \bar{\theta}), \quad (3.37)$$

где фазовый угол $\bar{\theta}$ не представляет практического интереса.

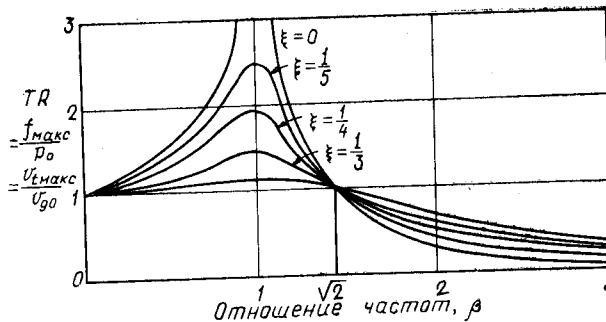


Рис. 3.11. Передаточное число (приложена нагрузка или перемещение)

Таким образом, если передаточное число для этого случая определить как отношение амплитуды колебаний массы к амплитуде колебаний основания, то его выражение совпадает с выражением (3.35). Оно может быть также выражено в виде

$$TR \equiv \frac{v_{\max}^t}{v_{g0}} = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}, \quad (3.38)$$

и с помощью кривых на рис. 3.11 можно оценить эффективность систем виброизоляции для обоих рассмотренных случаев.

Для расчета системы виброизоляции более удобно выразить ее параметры через показатель эффективности (чем через передаточное число), который определяется как $1 - TR$. Если, как видно из рис. 3.11, виброизоляция системы эффективна только при частотах $\beta > \sqrt{2}$ и затухание нежелательно в этом диапазоне, то очевидно, что повышение виброизоляции системы происходит при очень малом затухании. Таким образом, допустимо принимать в расчетах передаточное

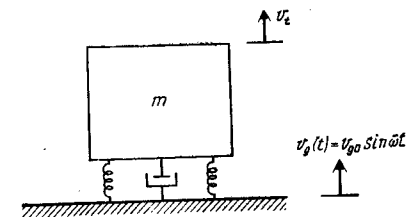


Рис. 3.12. Одномассовая система виброизоляции при возбуждении основания

число при нулевом затухании:

$$TR = \frac{1}{\beta^2 - 1}; \quad 1 - TR = \frac{\beta^2 - 2}{\beta^2 - 1}, \quad (3.39)$$

где подразумевается, что $\beta \geq \sqrt{2}$. Наконец, можно заметить, что

$$\beta^2 = \bar{\omega}^2 / \omega^2 = \bar{\omega}^2 (m/k) = \bar{\omega}^2 (W/kg) = \bar{\omega}^2 (\Delta_{st}/g),$$

где g — ускорение силы тяжести; $\Delta_{st} = W/k$ — статический прогиб, вызываемый весом виброизолированной системы.

Таким образом, эффективность применения системы виброизоляции может быть выражена в функции частоты сейсмического воздействия $\bar{\omega}$ и статического перемещения Δ_{st} . Решая уравнение (3.39), получаем отношение частот $\beta^2 = [2 - (1 - TR)] / [1 - (1 - TR)]$ и с учетом $\bar{f} = 2\pi\bar{\omega}$ и статического прогиба Δ_{st}

$$\bar{f} = 3,13 \sqrt{\frac{1}{\Delta_{st}} \frac{2 - (1 - TR)}{1 - (1 - TR)}}, \quad (3.40)$$

где \bar{f} — частота в герцах; Δ_{st} — статический прогиб в дюймах.

Графическое изображение уравнения (3.40) показано на рис. 3.13. Зная частоту предполагаемого возмущения, по этому графику можно непосредственно найти значение прогиба Δ_{st} , определяющего требуемый уровень виброизоляции системы, предполагая, что виброизоляторы имеют малое затухание. Из этого же графика следует, что виброизоляция нецелесообразна, если жесткость системы очень велика.

Пример 3.2. В балках железобетонных мостов в результате ползучести железобетона часто развиваются большие прогибы, и, если мост имеет много равных пролетов, эти прогибы могут привести к возникновению гармонических колебаний при прохождении транспорта по проезжей части моста с постоянной скоростью. Рессоры и амортизаторы автомобиля можно рассматривать как систему виброизоляции, которая ограничивает вертикальные перемещения, передаваемые пассажирам.

На рис. 3.14 показана весьма идеализированная модель такой системы. Автомобиль имеет вес 4000 фунтов (1,812 тс), и жесткость его рессор по результатам эксперимента характеризуется прогибом 0,08 дюйма (0,203 см) при дополнительной нагрузке 100 фунтов (45,3 кгс). Профиль моста представлен синусоидой с длиной волны 40 футов (12,19 м) (длина пролетного строения моста) и амплитудой 1,2 дюйма (3,05 см). Для этих исходных данных требуется определить параметры стационарных вертикальных колебаний внутри автомобиля, когда он движется со скоростью 45 миль в час (72,4 км/ч) при затухании, равном 40% критической величины.

Передаточное число для этого случая определяется выражением (3.38), и амплитуда вертикальных колебаний равна:

$$v_{\max}^t = v_{g0} \left[\frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right]^{1/2}.$$

Когда автомобиль движется со скоростью 45 миль в час (72,4 км/ч) = 66 футов в секунду (20,1 м/с), период возмущения

$$T_p = \frac{40 \text{ фут}}{66 \text{ фут/с}} = 0,606 \text{ с},$$

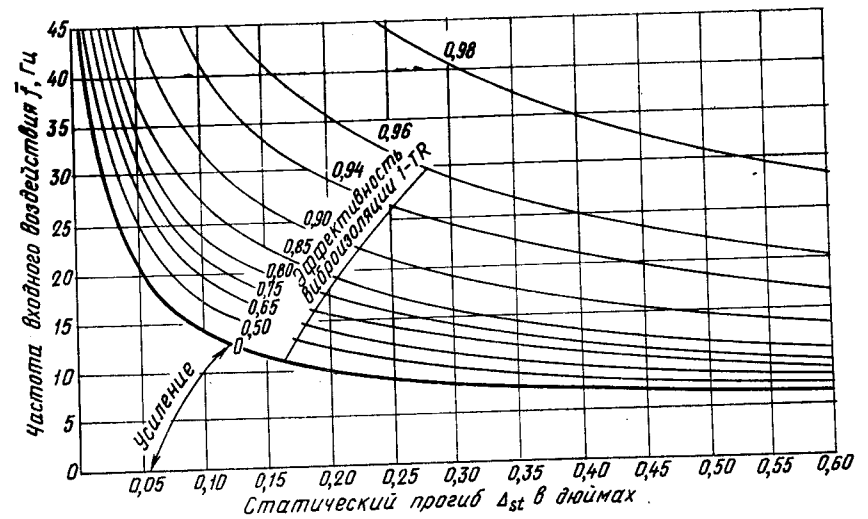


Рис. 3.13. Расчетная диаграмма системы виброизоляции

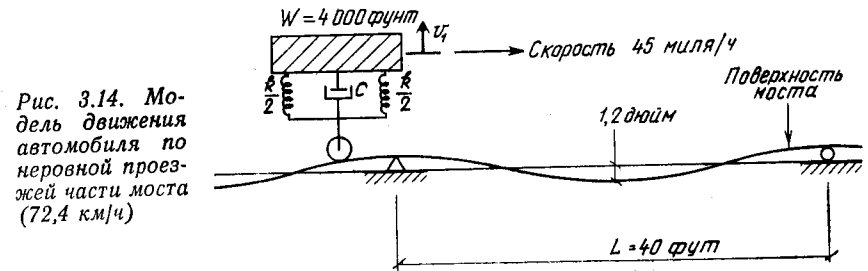


Рис. 3.14. Модель движения автомобиля по неровной проезжей части моста (72,4 км/ч)

а период собственных колебаний автомобиля

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{w}{kg}} = 0,572 \text{ с}.$$

Следовательно, $\beta = T/T_p = 0,572/0,606 = 0,944$ и при $\xi = 0,4$ амплитуда реакции

$$v_{\max}^t = \begin{cases} 1,2 \cdot 1,642 = 1,97 \text{ дюйм;} \\ 3,05 \cdot 1,642 = 5,01 \text{ см.} \end{cases}$$

Следует также отметить, что при нулевом затухании ($\xi = 0$) амплитуда была бы

$$v_{\max}^t = v_{g0} \frac{1}{1 - \beta^2} = \begin{cases} \frac{1,2}{0,11} = 10,9 \text{ дюйм;} \\ \frac{3,05}{0,11} = 27,7 \text{ см.} \end{cases}$$

Эта величина превышает возможности деформирования рессор и не имеет практического смысла, но наглядно иллюстрирует способность амортизаторов удара ограничивать колебания от неровностей поверхности дороги.

Пример 3.3. Известно, что машина с возвратно-поступательным движением весом 20 000 фунтов (9,06 тс) развивает вертикальные гармонические нагрузки с амплитудой 500 фунтов (0,227 тс) при рабочем режиме колебаний с частотой 40 Гц. Для ограничения вибрации здания, в котором должна быть поставлена машина, ее опирают на прямоугольную плиту с жесткими пружинами по четырем углам. Проектировщику нужно знать, какую жесткость пружин следует назначить, чтобы *полная* гармоническая нагрузка, передаваемая зданию, была меньше 80 фунтов (36,3 кгс).

Передаточное число в этом случае равно: $80/500 = 0,16$ и в соответствии с (3.39)

$$\frac{1}{TR} = |\beta^2 - 1| = 6,25,$$

откуда

$$\beta^2 = 7,25 = \frac{\bar{\omega}^2 W}{kg}.$$

Суммарная жесткость пружин

$$k = \frac{\bar{\omega}^2 W}{7,25g} = \begin{cases} 451 \cdot 10^3 \text{ фунт/дюйм;} \\ 80,4 \text{ тс/см.} \end{cases}$$

Таким образом, жесткость каждой пружины

$$k/4 = \begin{cases} 451/4 = 113 \text{ килофунт/дюйм;} \\ 80,4/4 = 20,1 \text{ тс/см.} \end{cases}$$

Следует отметить, что статический прогиб пружин от веса машины составляет:

$$\Delta_{st} = \begin{cases} 20/451 = 0,0444 \text{ дюйма;} \\ 9,06/80,4 = 0,113 \text{ см.} \end{cases}$$

3.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАТУХАНИЯ В СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

При рассмотрении реакции систем с одной степенью свободы предполагалось, что их динамические характеристики (масса, жесткость и затухание) известны. В большинстве случаев массу и жесткость конструкции можно определить достаточно просто из общих соображений или с помощью обобщенных выражений типа (1.37) и (1.39). С другой стороны, механизмы рассеяния энергии в реальных сооружениях хорошо известны лишь в отдельных случаях. Поэтому невозможно определить параметр затухания с помощью достаточно общих выражений. По этой причине затухание большинства строительных конструкций должно определяться на основании экспериментальных данных. Ниже приводятся краткие сведения о принципиальных методах оценки затухания по данным эксперимента.

3.6.1. Затухание свободных колебаний. По-видимому, самый простой и широко применяемый экспериментальный метод, как отмечалось в гл. 2, — измерение затухания свободных колебаний. Когда система каким-то образом приведена в состояние свободных колебаний, параметр затухания может быть найден по отношению двух

амплитуд перемещений в интервале m циклов. Если v_n — амплитуда колебаний в любой момент времени и v_{n+m} амплитуда через m циклов, то параметр затухания равен:

$$\xi = \frac{\delta_m}{2\pi m (\omega/\omega_D)} \approx \frac{\delta_m}{2\pi m}, \quad (3.41)$$

где $\delta_m = \ln(v_n/v_{n+m})$ — логарифмический декремент; ω и ω_D — соответственно частоты собственных колебаний без учета и с учетом затухания.

В большинстве практических случаев параметр затухания меньше 0,2, и поэтому приближенное соотношение (3.41), в котором не учитывается изменение частоты от сил затухания, является достаточно точным (ошибка при измерении ξ составляет менее 2%). Большое достоинство такого метода состоит в том, что потребность в оборудовании и измерительных приборах минимальна. Колебания могут возбуждаться любым удобным способом, и необходимо измерять только амплитуды относительных перемещений.

3.6.2. Резонансный метод. Другой принципиальный метод оценки затухания основан на рассмотрении стационарного гармонического режима колебаний и поэтому требует использования гармонического возбуждения сооружения с заданными частотами и амплитудами. С помощью такого оборудования можно построить для конструкции амплитудно-частотную характеристику путем приложения гармонической силы $p_0 \sin \omega t$ с близкими интервалами частот, которая охватывает резонансную частоту и графически представляет амплитуды результирующих перемещений в функции частот. Характерная амплитудно-частотная характеристика системы со средним затуханием показана на рис. 3.14.

Динамический коэффициент для любой заданной частоты представляет собой отношение амплитуды реакции при этой частоте к статической реакции (при нулевой частоте). Ранее было показано [см. зависимость (3.25)], что параметр затухания связан с динамическим коэффициентом в стадии резонанса. Если обозначить статическую реакцию и амплитуду резонансных колебаний через ρ_0 и $\rho_{\beta=1}$, то параметр затухания

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_{\beta=1}}. \quad (3.42)$$

Однако на практике трудно точно определить частоту в резонансном режиме. Более удобно найти в резонансном режиме максимальную амплитуду ρ_{\max} , которая возникает при несколько меньшей частоте. В этом случае в соответствии с (3.26, б) параметр затухания равен:

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_{\max}} \frac{\omega}{\omega_D} \approx \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_{\max}}. \quad (3.43)$$

Ошибка, получаемая в результате использования более простого выражения для большинства обычных сооружений, незначительна в связи с малым различием частот с учетом и без учета затухания.

Этот метод определения затухания требует применения простых измерительных приборов, способных фиксировать амплитуды относительных перемещений. Однако вычисление статических перемещений может представлять достаточно сложную задачу, поскольку для многих случаев нагружения систем нельзя получить нулевую частоту.

3.6.3. Метод половинной энергии (метод ширины полосы частот).

Из общего выражения для реакции системы при гармоническом воздействии [см. (3.21)] видно, что форма амплитудно-частотной характеристики определяется затуханием в системе. Поэтому можно вычислить параметр затухания исходя из особенностей этой характеристики. Одним из наиболее удобных методов является метод полосы частот или метод половинной энергии, согласно которому параметр затухания определяется по частотам, при которых реакция уменьшается до $(1/\sqrt{2}) \rho_{\beta=1}$, т. е. при частотах, для которых энергия входа равна половине энергии при резонансе.

Значения этих частот можно определить, полагая, что амплитуда реакции в уравнении (3.21) равна $1/\sqrt{2}$ амплитуды в резонансном режиме согласно уравнению (3.42), т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\rho_0}{2\xi} = \rho_0 \left[\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right]^{1/2}$$

После сокращения на ρ_0 и возведения обеих частей равенства в квадрат получим:

$$\frac{1}{8\xi^2} = \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

Решение этого уравнения приводит к следующему уравнению:

$$\beta^2 = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1+\xi^2},$$

из которого (пренебрегая ξ^2 в выражении под радикалом) получаем две частоты, определяющие ширину полосы частот:

$$\beta_1^2 \approx 1 - 2\xi - 2\xi^2; \quad \beta_2 \approx 1 - \xi - \xi^2;$$

$$\beta_2^2 \approx 1 + 2\xi - 2\xi^2; \quad \beta_2 \approx 1 + \xi - \xi^2,$$

откуда параметр затухания определяется полуразностью этих частот:

$$\xi \approx 1/2 (\beta_2 - \beta_1). \quad (3.44)$$

Этот метод определения параметра затухания также показан на рис. 3.15 для характерной амплитудно-частотной зависимости. Горизонтальная линия отсекает на кривой значение, равное $1/\sqrt{2}$ максимальных амплитуд реакции. Разность между частотами, в которых эта линия пересекает амплитудно-частотную характеристику, равна удвоенному параметру затухания. Таким образом, данный метод не требует определения статической реакции. Однако он пред-

полагает точное графическое построение амплитудно-частотной характеристики при резонансе и в пределах полосы частот, когда энергия равна половине энергии максимального входа.

Пример 3.4. Результаты вибрационных испытаний системы с одной степенью свободы представлены в виде графика (рис. 3.16). Там же показаны исходные данные, необходимые для вычисления параметра затухания. Последовательность этапов анализа сводится к следующему:

1) определяем максимум амплитуды M_a , равной $5,67 \cdot 10^{-2}$ дюймов (0,144 см);

2) проводим линию при $M_a/\sqrt{2}$, т. е. при $4,01 \cdot 10^{-2}$ дюймов (0,102 см);

3) определяем две частоты, при которых эта линия пересекает амплитудно-частотную характеристику: $f_1 = 19,55$; $f_2 = 20,42$ Гц;

4) вычисляем параметр затухания

$$\xi = (\Delta\beta)/2 = (f_2 - f_1)/(f_1 + f_2) = 2,18\%.$$

3.6.4. Потеря энергии за цикл колебаний (вибрационные испытания при резонансе). Если существует возможность измерить соотношение в виде сдвига фаз между входным воздействием и перемещениями системы, то затухание может быть вычислено по результатам вибрационных

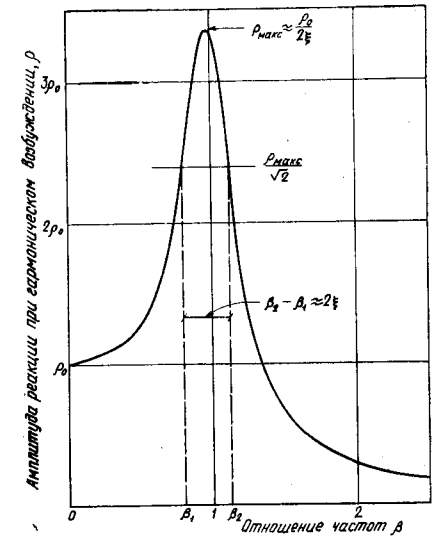


Рис. 3.15. Амплитудно-частотная характеристика системы со средним затуханием

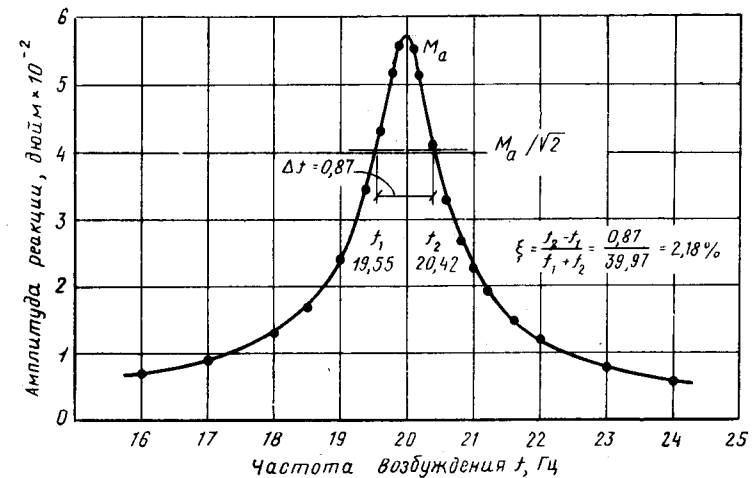


Рис. 3.16. Экспериментальная амплитудно-частотная характеристика для определения коэффициента затухания

испытаний только в резонансном режиме и нет необходимости строить амплитудно-частотную характеристику. Этот метод включает установление резонанса путем регулирования частоты входного воздействия до тех пор, пока реакция не будет иметь сдвиг по фазе на 90° с внешней нагрузкой. Затем внешняя нагрузка точно уравнивается силой затухания так, что если соотношение между внешней нагрузкой и результирующими перемещениями изображено в виде одного цикла нагружения (рис. 3.17), то результат может рассматриваться как диаграмма силы затухания-перемещения.

Если сооружение имеет линейное вязкое затухание, то эта кривая будет эллипсом 1, который показан на рис. 3.17. Тогда коэффициент затухания может быть непосредственно вычислен как отношение максимальной силы затухания к максимальной скорости

$$c = \frac{t_{D, \max}}{v_{\max}} = \frac{p_0}{\omega r}, \quad (3.45)$$

где максимальная скорость представлена в виде произведения частоты на амплитуду перемещения.

Когда затухание не линейно-вязкое, форма диаграммы сила-перемещение не эллиптическая. Например, может быть получена кривая 2, показанная на рис. 3.17.

В этом случае можно определить коэффициент эквивалентного вязкого затухания, при котором потеря энергии за цикл колебаний будет такой же, как для наблюдаемой диаграммы сила-перемещение. Другими словами, эквивалентное вязкое затухание соответствует эллиптической диаграмме сила-перемещение, равной по площади действительной диаграмме с одинаковым максимальным перемещением. В этом смысле пунктирная кривая на рис. 3.17 эквивалентна сплошной линии. Тогда амплитуда эквивалентной приложенной нагрузки равна:

$$p_0 = \frac{\omega_D}{\pi r},$$

где ω_D — площадь, ограниченная диаграммой сила-перемещение, т. е. потеря энергии за цикл колебаний.

Подставляя это отношение в равенство (3.45), получаем выражение для коэффициента эквивалентного вязкого затухания в функции ω_D ,

$$c_{eq} = \frac{\omega_D}{\pi \omega r^2}. \quad (3.46)$$

В большинстве случаев более удобно определить затухание в виде параметра критического затухания. С этой целью необходимо определить коэффициент критического затухания для системы, который

может быть выражен через массу и частоту [см. равенство (2.18)] или, что то же самое, через частоту и жесткость

$$c_c = 2k/\omega. \quad (3.47)$$

Последнее выражение более удобно в связи с тем, что жесткость сооружения может быть измерена при тех же испытаниях, что и потеря энергии за цикл колебаний, если рассматривать систему при

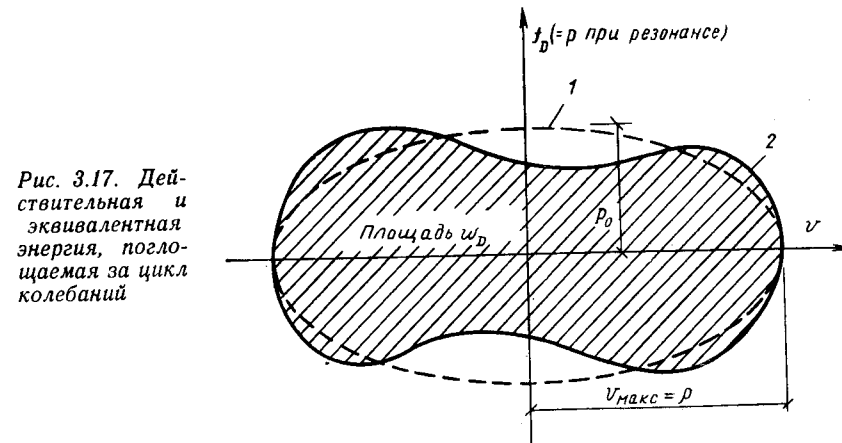


Рис. 3.17. Действительная и эквивалентная энергия, поглощаемая за цикл колебаний

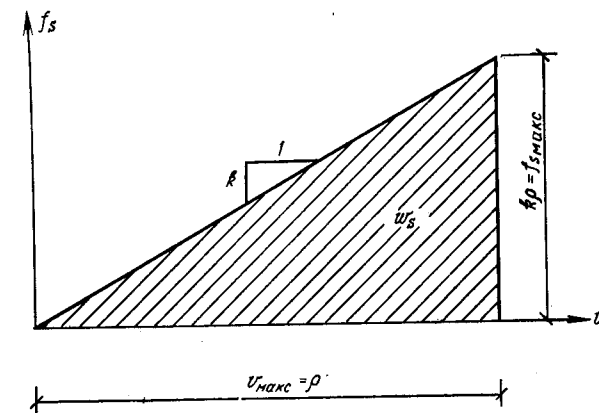


Рис. 3.18. Упругая жесткость и энергия деформаций

очень медленных колебаниях, т. е. практически в статических условиях. Диаграмма статическая сила-перемещение, полученная таким образом, будет иметь вид прямой (рис. 3.18) для линейно-упругой системы. Жесткость системы характеризуется углом наклона прямой. Жесткость может быть также выражена с помощью площади ω_s под диаграммой сила-перемещение

$$k = \frac{2\omega_s}{\rho^2}. \quad (3.48)$$

Таким образом, параметр затухания может быть получен в результате подстановки (3.46) в (3.48):

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{\omega_D}{4\pi\omega_s} \quad (3.49)$$

Параметр затухания, определенный соотношением (3.49), не зависит от частоты: он непосредственно определяется отношением диссипируемой энергии за цикл колебаний к энергии деформаций, накопленных при максимальном перемещении. Однако для любой системы с вязким затуханием потеря энергии и параметр затухания будут пропорциональны частоте гармонического воздействия. И, наоборот, когда параметр затухания определен по результатам резонансных испытаний, соответствующий коэффициент вязкого затухания, получаемый подстановкой (3.46) в (3.49), обратно пропорционален частоте

$$c_{eq} = \xi \frac{4\omega_s}{\omega\rho^2} \quad (3.50)$$

Это соотношение также характеризует зависимость вязкого затухания от частоты.

3.6.5. Гистерезисное затухание. Хотя модель вязкого затухания приводит к удобной форме уравнений колебания сооружений, результаты экспериментальных исследований редко соответствуют такой модели рассеивания энергии. Во многих практических случаях метод эквивалентного вязкого затухания, выражаемого через потерю энергии за цикл колебаний, приводит к разумной аппроксимации экспериментальных данных. Однако существенная зависимость вязкого трения от частоты колебаний не подтверждается большим числом опытов, которые указывают, что силы затухания почти не зависят от частоты воздействия.

Математическая модель, которая отражает указанное свойство независимости от частоты, связана с концепцией *гистерезисного* затухания, которое может быть определено как сила затухания, совпадающая по фазе со скоростью и пропорциональная перемещениям. Это соотношение сила-перемещение может быть представлено в форме

$$f_D = \zeta k |v| \frac{\dot{v}}{|\dot{v}|} \quad (3.51)$$

где ζ — коэффициент гистерезисного затухания, равный силам затухания в долях от сил упругости.

Диаграмма сила-перемещение для системы с гистерезисным затуханием за один цикл гармонических колебаний показана на рис. 3.19. Можно заметить, что сила затухания аналогична линейным упругим силам при возрастающих перемещениях, но с уменьшением перемещений сила затухания меняет знак. Потеря гистерезисной энергии за один цикл колебаний определяется выражением

$$\omega_D = 2\zeta k \rho^2 \quad (3.52)$$

Если указанную потерю энергии представить эквивалентным вязким затуханием, то его параметр определяется выражением (3.49). Другими словами, выражение (3.49) может быть использовано для характеристики параметра затухания независимо от действительной природы потери внутренней энергии. Если же коэффициент

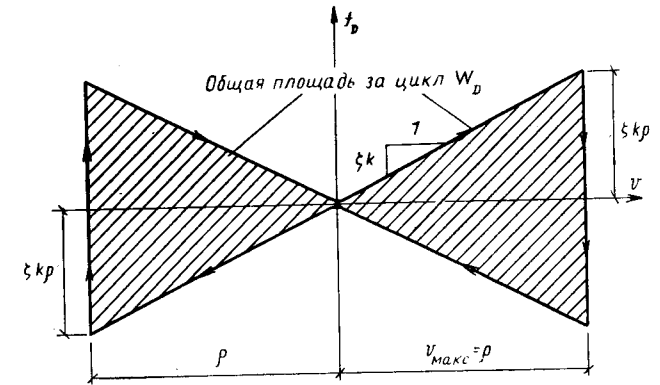


Рис. 3.19. Зависимость гистерезисной силы затухания от перемещения

гистерезисного затухания определяется на основании эксперимента, то он может быть выражен через параметр затухания подстановкой (3.52) и (3.48) в (3.49):

$$\zeta = \pi\xi \quad (3.53)$$

Таким образом, коэффициент гистерезисного затухания не зависит от частоты возбуждения, при которой проводилось испытание, в противоположность зависимости от частоты коэффициента вязкого затухания.

ГЛАВА 4

РЕАКЦИЯ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

4.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НАГРУЗКИ В ВИДЕ РЯДОВ ФУРЬЕ

В главе 3 были получены уравнения реакции системы с одной степенью свободы при любой гармонической внешней нагрузке. В настоящей главе будет показано, как эти же выражения могут быть применены для оценки реакции системы с одной степенью свободы при любой периодической нагрузке. При рассмотрении периодической нагрузки ее необходимо представить в виде рядов Фурье. Реакция для каждого члена ряда представляет собой реакцию при гармонической нагрузке. Общая реакция сооружения определяется суперпозицией параметров реакции для отдельных членов разложения нагрузки.

Рассмотрим произвольную периодическую нагрузку (рис. 4.1), которая может быть представлена рядом Фурье:

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T_p} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{T_p} t, \quad (4.1)$$

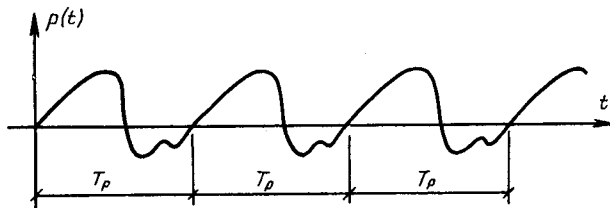


Рис. 4.1. Произвольное периодическое нагружение

в котором T_p — период функции нагрузки, а коэффициенты ряда определяются следующими выражениями:

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt;$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos \frac{2\pi n}{T_p} t dt; \quad (4.2)$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin \frac{2\pi n}{T_p} t dt.$$

4.2. РЕАКЦИЯ СИСТЕМЫ ПРИ НАГРУЗКЕ, ПРЕДСТАВЛЯЕМОЙ РЯДАМИ ФУРЬЕ

Когда произвольная периодическая нагрузка представлена в виде ряда Фурье (4.1), она содержит постоянную нагрузку (среднюю нагрузку, характеризуемую коэффициентом a_0) и ряд гармонических нагрузок с частотами $\bar{\omega}_n$ и амплитудами a_n и b_n . Установившаяся реакция недемпфированной системы с одной степенью свободы при каждом члене гармонической нагрузки в форме синуса определяется выражением (3.11). Откуда, опуская слагаемое, соответствующее переходному режиму, получаем:

$$v_n(t) = \frac{b_n}{k} \frac{1}{1 - \beta_n^2} \sin n \bar{\omega}_1 t, \quad (4.3a)$$

где

$$\beta_n = \frac{\bar{\omega}_n}{\omega} = \frac{nT}{T_p} = \frac{n\bar{\omega}_1}{\omega}.$$

Аналогично установившаяся реакция для слагаемых при косинусе

$$v_n(t) = \frac{a_n}{k} \frac{1}{1 - \beta_n^2} \cos n \bar{\omega}_1 t. \quad (4.3б)$$

Наконец, установившаяся реакция при постоянной компоненте нагрузки представляет собой статический прогиб

$$v_0 = \frac{a_0}{k}. \quad (4.3в)$$

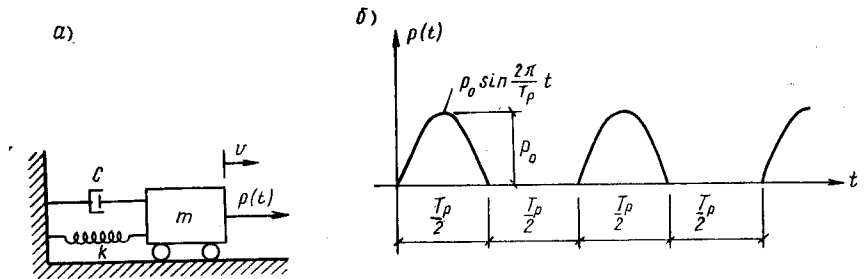


Рис. 4.2. Пример анализа реакции при периодическом нагружении

Общая реакция недемпфированной системы может быть теперь представлена как сумма реакций при членах разложения ряда

$$v(t) = \frac{1}{k} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \beta_n^2} (a_n \cos n \bar{\omega}_1 t + b_n \sin n \bar{\omega}_1 t) \right], \quad (4.3)$$

где коэффициенты амплитуды нагрузки определяются выражениями ряда Фурье (4.2).

Для учета затухания при определении реакции системы с одной степенью свободы в случае периодической нагрузки необходимо подставить выражения для гармонической реакции демпфированной системы (3.20) вместо соответствующих выражений для реакции системы без затухания. В этом случае полная реакция в установившемся режиме равна:

$$v(t) = \frac{1}{k} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \{ [a_n \cdot 2\xi\beta_n + b_n (1 - \beta_n^2)] \times \right. \\ \left. \times \sin n \bar{\omega}_1 t + [a_n (1 - \beta_n^2) - b_n \cdot 2\xi\beta_n] \cos n \bar{\omega}_1 t \right). \quad (4.4)$$

Пример 4.1. В качестве примера анализа реакции системы при периодической нагрузке рассмотрим систему и схему нагружения на рис. 4.2. Нагрузка представлена в виде положительных частей простой синусоиды.

Коэффициенты ряда Фурье для этой нагрузки в соответствии с (4.2) равны:

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p/2} p_0 \sin \frac{2\pi t}{T_p} dt = \frac{p_0}{\pi};$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p/2} p_0 \sin \frac{2\pi t}{T_p} \cos \frac{2\pi n t}{T_p} dt =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ нечетных;} \\ \frac{p_0}{\pi} \frac{2}{1-n^2} & \text{при } n \text{ четных;} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p/2} p_0 \sin \frac{2\pi t}{T_p} \sin \frac{2\pi n t}{T_p} dt =$$

$$= \begin{cases} p_0/2 & \text{при } n=1; \\ 0 & \text{при } n > 1. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в (4.1), получим следующее представление периодической нагрузки:

$$p(t) = \frac{p_0}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sin \bar{\omega}_1 t - \frac{2}{3} \cos 2\bar{\omega}_1 t - \frac{2}{15} \cos 4\bar{\omega}_1 t + \frac{2}{35} \cos 6\bar{\omega}_1 t - \dots \right), \quad (a)$$

$$\text{где } \bar{\omega}_1 = \frac{2\pi}{T_p}.$$

Если предположить, что система на рис. 4.2 недемпфирована, а период повторения нагрузки принять равным $4/3$ периода собственных колебаний системы,

$$\frac{T_p}{T} = \frac{4}{3}; \quad \frac{\bar{\omega}_1}{\omega} \equiv \beta_1 = \frac{3}{4};$$

$$\frac{2\bar{\omega}_1}{\omega} \equiv \beta_2 = 3/2, \quad (б)$$

то установившаяся реакция системы определяется выражением (4.3). Подставляя численные значения коэффициентов нагрузки и отношений частот из (а) и (б), окончательно получим:

$$v(t) = \frac{p_0}{k\pi} \left(1 + \frac{8\pi}{7} \sin \bar{\omega}_1 t + \frac{8}{15} \cos 2\bar{\omega}_1 t + \frac{1}{60} \cos 4\bar{\omega}_1 t + \dots \right). \quad (в)$$

Если колебания систем затухающие, то анализ должен выполняться аналогично с использованием (4.4) вместо (4.3).

4.3. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ (КОМПЛЕКСНАЯ) ФОРМА РЕШЕНИЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ В ВИДЕ РЯДОВ ФУРЬЕ

Выражения для рядов Фурье (4.1) и (4.2) могут быть также записаны в экспоненциальной форме, если для тригонометрических функций подставить соответствующее экспоненциальное выражение в соответствии с равенством Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= -\frac{1}{2}i (e^{ix} - e^{-ix}); \\ \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

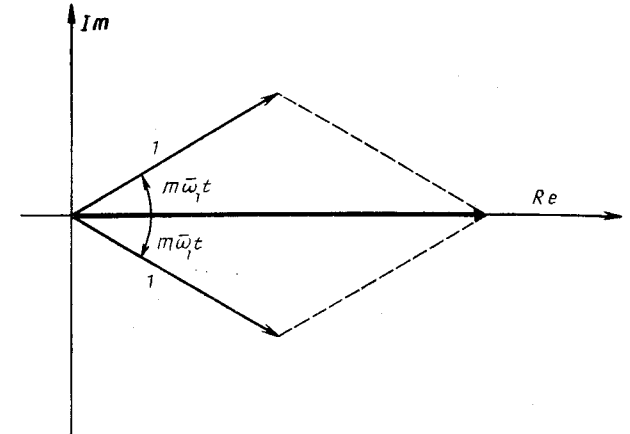


Рис. 4.3. Представление экспоненциальной нагрузки в виде векторов

откуда

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\bar{\omega}_1 t), \quad (4.6)$$

где

$$c_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \exp(-in\bar{\omega}_1 t) dt. \quad (4.7)$$

Следует отметить, что в уравнении (4.6) каждому положительному значению n , например $n = +m$, соответствует $n = -m$. Два члена $\exp(im\bar{\omega}_1 t)$ и $\exp(-im\bar{\omega}_1 t)$ могут быть представлены как единичные векторы, поворачивающиеся соответственно против часовой и по часовой стрелке с угловой скоростью $m\bar{\omega}_1$ (рис. 4.3). Мнимые компоненты этой пары векторов всегда взаимно уравновешены. Следует отметить, что, согласно (4.7), c_{+m} является комплексно сопряженным числом c_{-m} . Таким образом, все мнимые части из уравнения исключаются, как и следует из того, что $p(t)$ — действительная функция нагрузки.

Имея выражения произвольной периодической нагрузки в экспоненциальной форме рядов Фурье (4.6) и (4.7), следует записать

уравнение реакции системы при гармонической нагрузке также в экспоненциальной форме. Ограничимся рассмотрением установившегося режима и предположим, что периодическая нагрузка продолжается достаточно долго, чтобы переходной режим закончился. Вводя комплексную величину единичной функции нагрузки $\exp(i\bar{\omega}t)$ из уравнения (3.1), получаем:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = \exp(i\bar{\omega}t), \quad (4.8)$$

стационарное решение которого

$$v(t) = H(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t). \quad (4.9)$$

Если уравнение (4.9) подставить в (4.8), то функция $H(\bar{\omega})$, которая определяется как *комплексная передаточная функция*, а также как *частотная* или *амплитудно-фазовая характеристика системы*, принимает вид

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{-\bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega}c + k}. \quad (4.10)$$

После подстановки выражений для отношения частот β и параметра затухания ξ получаем:

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k(-\beta^2 + 2i\beta\xi + 1)}. \quad (4.11)$$

Следовательно, комплексная передаточная функция при воздействии с частотой $\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1$ равна:

$$H(n\bar{\omega}_1) = \frac{1}{k(-n^2\beta_1^2 + 2in\beta_1\xi + 1)}, \quad (4.12)$$

где

$$\beta_1 = \bar{\omega}_1/\omega.$$

Из выражения (4.10) видно, что $H(n\bar{\omega}_1)$ является комплексно сопряженной с $H(-n\bar{\omega}_1)$. Следовательно, можно выразить установившуюся реакцию системы с одной степенью свободы при силовом воздействии, которое выражается в виде члена ряда Фурье. В соответствии с принципом суперпозиции полная установившаяся реакция системы при любой периодической функции нагружения может быть представлена в виде

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n\bar{\omega}_1) c_n \exp(in\bar{\omega}_1 t). \quad (4.13)$$

Преимущество в простоте записи экспоненциальной формы анализа периодической реакции становится очевидным, если сравнить (4.13) с соответствующим выражением (4.4) в тригонометрических рядах.

ГЛАВА 5

РЕАКЦИЯ ПРИ ИМПУЛЬСИВНЫХ НАГРУЗКАХ

5.1. ПРИРОДА ИМПУЛЬСИВНЫХ НАГРУЗОК

Рассмотрим другой специальный класс динамических нагрузок для систем с одной степенью свободы — импульсивные нагрузки. Такие нагрузки характеризуются главным импульсом, как показано на рис. 5.1, и, как правило, сравнительно непродолжительны. Импульсивные или ударные нагрузки часто имеют большое значение при расчете определенных видов конструкций, например транспортных средств типа грузовых и легковых автомобилей или автокранов. При определении максимальной реакции конструкций при импульсивных нагрузках затухание сказывается значительно меньше, чем при периодических и гармонических нагрузках. Максимум реакции при импульсивном нагружении достигается за очень короткий промежуток времени, прежде чем силы затухания смогут поглотить значительную долю энергии, передаваемой сооружению. По этой причине в этом разделе рассматривается только реакция недемпфированных систем при импульсивных воздействиях.

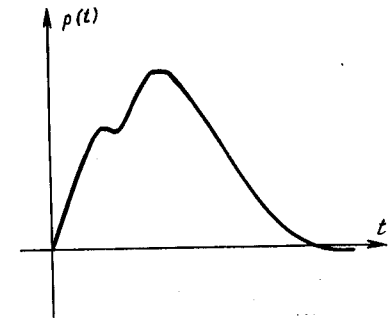


Рис. 5.1. Произвольное импульсивное нагружение

5.2. СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ИМПУЛЬС

Для импульсивных нагрузок, которые могут быть выражены простыми аналитическими функциями, получаются решения уравнений колебаний в замкнутом виде. В качестве примера такой нагрузки рассмотрим синусоидальный импульс (рис. 5.2). Реакция системы разделяется на две фазы: соответственно для интервала времени приложения нагрузки и следующей за ней фазы свободных колебаний.

Фаза I. В этой фазе сооружение, находящееся в состоянии покоя, подвергается гармонической нагрузке. Реакция системы без затухания с учетом как переходного, так и стационарного режимов колебаний определяется выражением (3.11): для $0 \leq t < t_1$

$$v(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t). \quad (5.1)$$

Фаза II. Свободные колебания, которые происходят в этой фазе, зависят от перемещения $v(t_1)$ и скорости $\dot{v}(t_1)$ в конце фазы I

и могут быть получены [см. уравнение (2.11)]

для $\bar{t} = t - t_1 \geq 0$

$$v(\bar{t}) = \frac{\dot{v}(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + v(t_1) \cos \omega \bar{t}, \quad (5.2)$$

где введена новая переменная времени $\bar{t} = t - t_1$.

Величина динамической реакции при приложении такой импульсивной нагрузки зависит от отношения длительности нагружения к периоду собственных колебаний системы. Параметр реакции $R(t) = v(t)/(p_0/k)$ при $t_1/T = 3/4$ показан на рис. 5.3. На этом же гра-

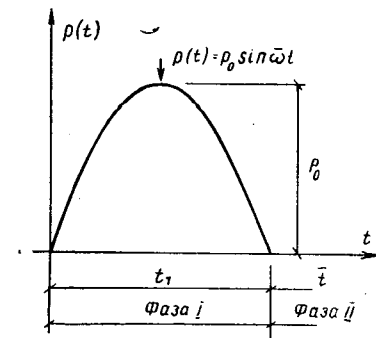


Рис. 5.2. Полуциноидальный импульс

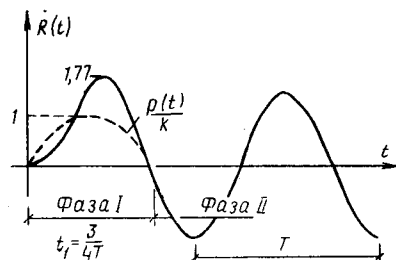


Рис. 5.3. Относительный параметр реакции при синусоидальном импульсе ($t_1 = \frac{3}{4} T$)

фике для сравнения приведена кривая $p(t)/k$, которая имеет максимум, равный единице в принятом масштабе.

В целом наибольший интерес для инженера-строителя представляет максимальная реакция системы при импульсивной нагрузке, чем весь процесс деформирования. Время достижения максимальной реакции может быть определено путем дифференцирования выражения (5.1) во времени и приравнивания производной нулю:

$$\frac{dv(t)}{dt} = 0 = \frac{p_0}{p} \frac{1}{1-\beta^2} (\bar{\omega} \cos \bar{\omega} t - \bar{\omega} \cos \omega t),$$

откуда

$$\cos \bar{\omega} t = \cos \omega t,$$

и, следовательно,

$$\bar{\omega} t = 2\pi n \pm \omega t; \quad n=0, \pm 1, 2, 3, \dots \quad (5.3)$$

Это выражение, безусловно, справедливо, только пока $\bar{\omega} t$ меньше или равно π , что соответствует возникновению максимума реакции в период действия импульсивной нагрузки. Для наиболее интересного случая нагружения, когда частота нагрузки приближается к частоте собственных колебаний ($\bar{\omega} \rightarrow \omega$), время достижения макси-

мальной реакции определяется подстановкой $n = 1$ и принятием отрицательного знака в выражении (5.3):

$$\bar{\omega} t = \frac{2\pi}{1 + (\bar{\omega}/\omega)}. \quad (5.4)$$

Тогда амплитуда максимальной реакции определяется подстановкой (5.4) в уравнение (5.1). Результат справедлив только при $\bar{\omega} t \leq \pi$, соответствует случаю $\beta < 1$, т. е. $\bar{\omega} < \omega$.

При $\beta > 1$ ($\bar{\omega} > \omega$) максимум реакции приходится на фазу свободных колебаний (фаза II). Начальное перемещение и скорость для этой фазы определяются подстановкой $\bar{\omega} t_1 = \pi$ в уравнение (5.1):

$$v(t_1) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \left(0 - \beta \sin \frac{\pi}{\beta} \right);$$

$$\dot{v}(t_1) = \frac{p_0}{k} \frac{\bar{\omega}}{1-\beta^2} \left(-1 - \cos \frac{\pi}{\beta} \right). \quad (5.5)$$

Амплитуда свободных колебаний, согласно (2.15), равна:

$$\rho = \left\{ \left[\frac{\dot{v}(t_1)}{\omega} \right]^2 + [v(t_1)]^2 \right\}^{1/2} = \frac{p_0/k}{1-\beta^2} \beta \left(2 + 2 \cos \frac{\pi}{\beta} \right)^{1/2}.$$

Следовательно, динамический коэффициент при этом равен:

при

$$\beta > 1, t > t_1$$

$$D = \frac{v_{\max}}{p_0/k} = \frac{2\beta}{1-\beta^2} \cos \frac{\pi}{2\beta}. \quad (5.6)$$

Пример 5.1. В качестве примера расчета максимальной реакции при продолжительном синусоидальном импульсе, когда максимум реакции достигается в период действия нагрузки, рассмотрим случай $\beta = 2/3$ ($\bar{\omega} = 2/3 \omega$ или $t_1 = 3/4 T$).

При этом в соответствии с (5.4)

$$\bar{\omega} t = \frac{2\pi}{1 + 3/2} = \frac{4}{5} \pi$$

и после подстановки этой величины в выражение (5.1) динамический коэффициент равен:

$$D = \frac{1}{1 - 4/9} (\sin^{4/5} \pi - 2/3 \sin^{6/5} \pi) = 1,77.$$

Специальный пример короткого импульса, при котором максимальная реакция приходится на фазу свободных колебаний, соответствует случаю $\beta = 4/3$ ($\bar{\omega} = 4/3 \omega$ или $t_1 = 3/8 T$). При этом динамический коэффициент, согласно выражению (5.6), равен:

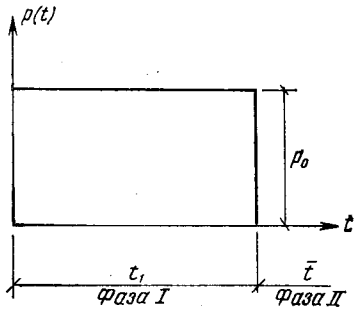
$$D = \frac{2(4/3)}{1 - 16/9} \cos \frac{\pi}{2(4/3)} = 1,31.$$

Максимальная реакция при резонансной импульсивной нагрузке ($\beta = 1$) может быть найдена аналогичными методами из условия резонанса (3.31). При этом максимум реакции приходится на конец импульса ($\bar{\omega} t = \pi$) и динамический коэффициент равен: $D = \pi/2 = 1,57$.

5.3. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ИМПУЛЬС

Второй случай определения реакции при импульсивных воздействиях относится к прямоугольному импульсу, показанному на рис. 5.4. Реакция системы опять разделяется на фазу нагружения и следующую за ней фазу свободных колебаний.

Фаза I. Внезапно приложенная нагрузка, которая остается постоянной в период фазы I, называется *ступенчатой нагрузкой*. Частное решение уравнения при ступенчатой нагрузке соответствует статическому прогибу



$$v_p = \frac{p_0}{k}. \quad (5.7a)$$

С учетом этого выражения общее решение содержит постоянные, которые определяются начальными условиями, и равно: для $0 \leq t \leq t_1$

$$v(t) = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t). \quad (5.7b)$$

Рис. 5.4. Прямоугольный импульс

Фаза II. Свободные колебания в период фазы II снова определяются уравнением (5.2)

для $\bar{t} = t - t_1 \geq 0$

$$v(t) = \frac{v(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + v(t_1) \cos \omega \bar{t}. \quad (5.8)$$

Очевидно, что для прямоугольного импульса максимальная реакция обычно всегда приходится на конец фазы I и динамический коэффициент в этом случае $D = 2$. При более кратковременных нагрузках максимум реакции может приходиться на фазу II свободных колебаний, а амплитуда реакции определяется выражением (2.15)

$$\rho = v_{\max} \sqrt{\left[\frac{\dot{v}(t_1)}{\omega} \right]^2 + [v(t_1)]^2}. \quad (5.9)$$

При $\dot{v}(t) = p_0 \omega / k \sin \omega t$ и $\omega = 2\pi/T$ получаем:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= p_0/k \left[\left(1 - 2 \cos \frac{2\pi}{T} t_1 + \cos^2 \frac{2\pi}{T} t_1 \right) + \sin^2 \frac{2\pi}{T} t_1 \right]^{1/2} = \\ &= p_0/k \left[2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} t_1 \right) \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

откуда

$$D \equiv \frac{v_{\max}}{p_0/k} = 2 \sin \frac{\pi t_1}{T}; \quad \frac{t_1}{T} \leq \frac{1}{2}. \quad (5.10)$$

Таким образом, динамический коэффициент изменяется по закону синуса при отношениях t_1/T меньше $\frac{1}{2}$.

5.4. ТРЕУГОЛЬНЫЙ ИМПУЛЬС

Последняя схема импульсивной нагрузки, которая будет рассмотрена, представляет собой треугольный импульс с уменьшающейся амплитудой, показанной на рис. 5.5.

Фаза I. Нагрузка в этой фазе принимается равной $p_0 (1 - t/t_1)$, и легко показать, что частное решение уравнения равно:

$$v_p(t) = \frac{p_0}{k} \left(1 - \frac{t}{t_1} \right). \quad (5.11)$$

При нулевых начальных условиях после определения произвольных постоянных общее решение имеет вид

$$v(t) = \frac{p_0}{k} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega t_1} - \cos \omega t - \frac{t}{t_1} + 1 \right). \quad (5.12)$$

Фаза II. Определяя значение уравнения (5.12) и его первой производной в конце фазы I ($t = t_1$), получаем:

$$\begin{aligned} v(t_1) &= \frac{p_0}{k} \left(\frac{\sin \omega t_1}{\omega t_1} - \cos \omega t_1 \right); \\ \dot{v}(t_1) &= \frac{p_0 \omega}{k} \left(\frac{\cos \omega t_1}{\omega t_1} + \right. \\ &\quad \left. + \sin \omega t_1 - \frac{1}{\omega t_1} \right), \quad (5.13) \end{aligned}$$

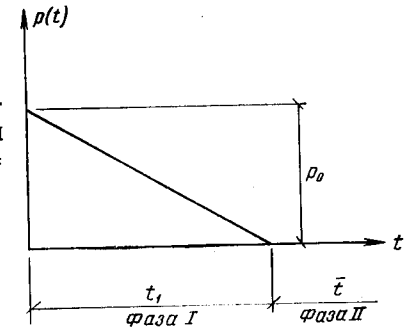


Рис. 5.5. Треугольный импульс

которые могут быть подставлены в уравнение (5.2) для определения параметров свободных колебаний в фазе II.

Максимальные величины функций реакции определены, как и в других случаях, из условия, что скорость колебаний равна нулю. Для нагрузок очень короткой продолжительности ($t_1/T < 0,4$) максимальная реакция приходится на фазу II свободных колебаний. В противном случае максимум имеет место во время приложения нагрузки (фаза I).

Динамический коэффициент $D = v_{\max}/(p_0/k)$ определен для различной продолжительности нагружения:

t_1/T	0,2	0,4	0,5	0,75	1	1,5	2
D	0,66	1,05	1,2	1,42	1,55	1,69	1,76

5.5. СПЕКТРЫ РЕАКЦИИ ПРИ ИМПУЛЬСИВНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В ранее полученных выражениях максимум реакции, получаемый в недемпфированной системе с одной степенью свободы при определенной форме импульсивной нагрузки, зависит только от отно-

шения продолжительности импульса к периоду собственных колебаний конструкции t_1/T . Таким образом, удобно изобразить динамический коэффициент в виде функции t_1/T для различных видов импульсивных нагрузок. Например, данные, характеризующие зависимости от t_1/T , изображены в виде кривых на рис. 5.6. Аналогичные графики, соответствующие другим видам импульсивной нагрузки, также представлены на этом рисунке. Их называют *спектрами перемещений реакции* или просто *спектрами реакции* при импульсивных нагрузках. Обычно такие графики можно использовать для предказания с необходимой инженерной точностью максимальной реакции простых конструкций при импульсивных нагрузках определенного вида.

Эти спектры реакции служат также для определения реакции конструкции на импульс ускорения, приложенный к ее основанию. Если приложенное ускорение в основании принять $\ddot{v}_g(t)$, то оно вызывает эффективную импульсивную нагрузку $p_{\text{eff}}(t) = -m\ddot{v}_g(t)$ [см. уравнение (1.21)]. При максимальной амплитуде ускорений в основании \ddot{v}_{g0} максимальная эффективная импульсивная нагрузка будет $p_{0,\text{eff}} = -m\ddot{v}_{g0}$. Таким образом, динамический коэффициент принимает вид

$$D = \left| \frac{v_{\text{макс}}}{m \ddot{v}_{g0} / k} \right|, \quad (5.14)$$

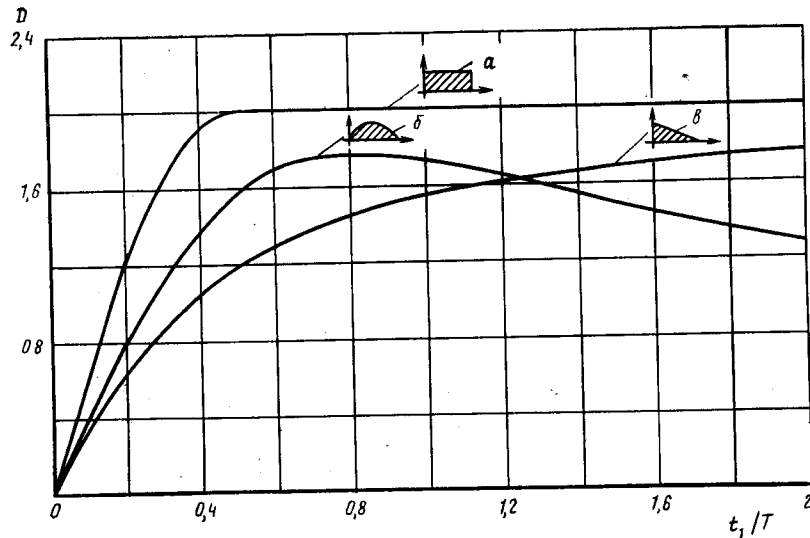


Рис. 5.6. Спектры перемещений реакции при трех видах импульсов (спектры импульсивных нагрузок)
 a — прямоугольный; b — полусинусоидальный; v — треугольный; D — динамический коэффициент; t_1/T — относительная продолжительность импульса

в котором обычно представляет интерес только абсолютная величина реакции. Его также можно выразить в виде

$$D = \left| \frac{\ddot{v}_{\text{макс}}^t}{\ddot{v}_{g0}} \right|, \quad (5.15)$$

где $\ddot{v}_{\text{макс}}^t$ — максимальное полное ускорение массы,

Это объясняется тем, что в недемпфированной системе произведение массы на полное ускорение по величине должно равняться усилию в упругой пружине $k v_{\text{макс}}$. Соответственно графики спек-

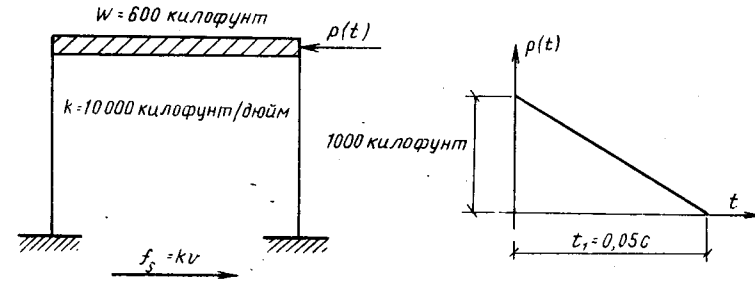


Рис. 5.7. Сооружение в виде системы с одной степенью свободы при взрывной нагрузке

$f_s = kv$ — упругая восстанавливающая сила; k — общая горизонтальная жесткость ($k = 1783,5$ тс/см); W — общий вес ($W = 271,8$ тс); $p(t)$ — нагрузка от взрыва (1000 килофунтов = 453 тс)

ров реакции на рис. 5.6 можно использовать для определения максимального ускорения реакции массы t при импульсе ускорения в основании, а также максимального перемещения реакции при внешних импульсивных нагрузках. Используемые для этой цели графики обычно называются *спектрами импульсивных воздействий*.

Пример 5.2. В качестве примера использования спектров импульсивных воздействий для оценки максимальной реакции системы с одной степенью свободы при импульсивной нагрузке рассмотрим систему на рис. 5.7, которая представляет собой одноэтажное здание, подверженное взрывной нагрузке. Для заданного веса и жесткости колонн период собственных колебаний здания равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{kg}} = \begin{cases} 2\pi \sqrt{\frac{600}{10\,000 \cdot 386}} = 0,079 \text{ с;} \\ 2\pi \sqrt{\frac{271,8}{1783,5 \cdot 980}} = 0,079 \text{ с.} \end{cases}$$

Таким образом, отношение продолжительности импульса к периоду собственных колебаний

$$\frac{t_1}{T} = \frac{0,05}{0,079} = 0,63,$$

и в соответствии с рис. 5.6 динамический коэффициент $D = 1,33$, откуда максимальное перемещение

$$v_{\max} = D \frac{p_0}{k} = \begin{cases} 1,33 \frac{1000}{10\,000} = 0,133 \text{ дюйма;} \\ 1,33 \frac{453}{1783,5} = 0,338 \text{ см.} \end{cases}$$

Если продолжительность импульса взрывного воздействия была бы в 10 раз меньше ($t_1 = 0,005$ с), то динамический коэффициент при таком показателе продолжительности импульса ($t_1/T = 0,063$) равен лишь $D = 0,44$ и, следовательно, силы упругости будут равны: $f_s = 199,3$ тс (440 килофунтов). Таким образом, для импульса очень небольшой продолжительности значительная часть приложенной нагрузки воспринимается силами инерции, а вызываемые напряжения намного меньше напряжений при более продолжительных воздействиях.

5.6. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА РЕАКЦИИ ПРИ ИМПУЛЬСИВНЫХ НАГРУЗКАХ

По результатам анализа спектров реакции на рис. 5.6 и аналогичных спектров при других видах нагрузки можно сделать два общих вывода о реакции сооружений при импульсивных воздействиях:

1. При продолжительных воздействиях, например при $t_1/T > 1$, динамический коэффициент в основном зависит от скорости возрастания нагрузки до ее максимальной величины. При внезапном приложении нагрузки достаточной продолжительности коэффициент динамичности равен 2, а при постепенном увеличении нагрузки $D = 1$.

2. Нагрузки небольшой продолжительности, например при $t_1/T < \frac{1}{4}$, вызывают перемещения с амплитудой v_{\max} , которая в основном

зависит от величины приложенного импульса $I = \int_0^{t_1} p(t) dt$ и на которую не очень сильно влияет форма импульса. Тем не менее коэффициент динамичности D существенно зависит от формы нагружения, так как он пропорционален отношению площади импульса к максимальной амплитуде нагрузки, о чем свидетельствует сопоставление кривых на рис. 5.6 в области коротких периодов. Таким образом, v_{\max} является более важной характеристикой реакции сооружения.

Удобный приближенный метод оценки максимальной реакции при импульсивной нагрузке небольшой продолжительности, который характеризует в математической форме сущность второго вывода, может быть сформулирован следующим образом. Момент импульса для массы m записывается в виде

$$m\Delta\dot{v} = \int_0^{t_1} [p(t) - kv(t)] dt, \quad (5.16)$$

где $\Delta\dot{v}$ — изменение скорости, вызываемое нагрузкой.

Согласно этому выражению для малых величин t_1 перемещение, развиваемое в течение действия нагрузки, $v(t_1)$ представляет собой величину порядка $(t_1)^2$, в то время как изменение скорости $\Delta\dot{v}$ — величина порядка t_1 . Поскольку импульсивная нагрузка — также величина порядка t_1 , силы упругости $kv(t)$ быстро уменьшаются по мере приближения t_1 к нулю и становятся пренебрежимо малыми для нагрузок небольшой продолжительности.

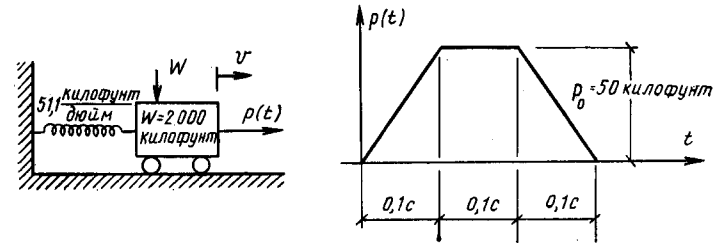


Рис. 5.8. Приближенный анализ реакции при импульсивном воздействии
51,1 килофунт/дюйм=91 тс/см; $W=906$ тс; $p_0=22,6$ тс

С учетом изложенного можно использовать следующее приближенное соотношение:

$$m\Delta\dot{v} \approx \int_0^{t_1} p(t) dt \quad (5.17)$$

или

$$\Delta\dot{v} = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} p(t) dt. \quad (5.18)$$

После окончания времени действия нагрузки реакция сооружения характеризуется его свободными колебаниями

$$v(\bar{t}) = \frac{\dot{v}(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + v(t_1) \cos \omega \bar{t},$$

где $\bar{t} = t - t_1$.

Но поскольку перемещение $v(t_1)$ пренебрежимо мало и скорость $\dot{v}(t_1) = \Delta\dot{v}$, можно получить следующее приближенное выражение:

$$v(\bar{t}) \approx \frac{1}{m\omega} \left(\int_0^{t_1} p(t) dt \right) \sin \omega \bar{t}. \quad (5.19)$$

Пример 5.3. В качестве примера использования этой приближенной формулы рассмотрим реакцию системы, показанную на рис. 5.8 при действии импульсивной нагрузки. В этом случае $\omega = \sqrt{kg/W} = 3,14$ рад/с и $\int_0^{t_1} p(t) dt = 10$ килофунтов · с (4,53 тс · с).

Параметр реакции приближенно равен:

$$v(\bar{t}) = \frac{10 \cdot 386}{2000 \cdot 3,14} \sin \omega \bar{t},$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ (386 дюйм/с²) — ускорение силы тяжести. Максимум реакции при $\sin \omega \bar{t} = 1$ равен: $v_{\text{макс}} \approx 0,614$ дюйма [1,56 см].

Максимальная упругая сила, развиваемая в пружине и представляющая наибольший интерес для инженера-строителя,

$$f_{S \text{ макс}} = kv_{\text{макс}} = \begin{cases} 51,1 \cdot 0,614 = 31,4 \text{ килофунта;} \\ 9,1 \cdot 1,56 = 14,2 \text{ тс.} \end{cases}$$

Поскольку период свободных колебаний системы $T = 2\pi/\omega = 2 \text{ с}$, при кратковременной нагрузке ($t_1/T = 0,15$) приближенный расчет дает достаточно надежный результат. Действительно, максимум реакции, определенный непосредственным интегрированием уравнения колебаний, составляет 1,53 см (0,604 дюйма), и, таким образом, погрешность приближенного результата меньше 2%.

ГЛАВА 6

РЕАКЦИЯ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ ОБЩЕГО ВИДА

6.1. ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ БЕЗ ЗАТУХАНИЯ

Методика, описанная в гл. 5 для приближенного вычисления реакции сооружений при импульсивной кратковременной нагрузке, может быть использована при выводе формулы для оценки реакции при динамической нагрузке общего вида. Рассмотрим произвольную нагрузку, показанную на рис. 6.1, с показателем интенсивности $p(\tau)$. Нагрузка за бесконечно малый интервал времени равна $p(\tau) \times \Delta\tau$, и уравнение (5.19) может быть использовано для определения реакции сооружения при этом импульсе. Следует отметить, что хотя метод приближенный, для импульсов конечной продолжительности он становится точным, если время действия нагрузки стремиться к нулю. Таким образом, реакция системы при действии нагрузки

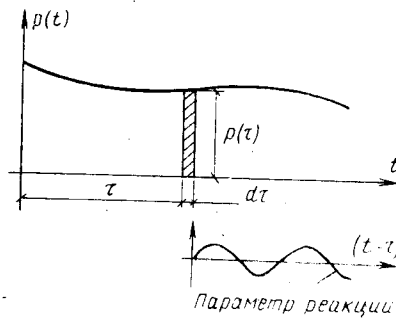


Рис. 6.1. Вычисление интеграла Дюамеля для системы без затухания

$p(\tau)$ за бесконечно малый интервал времени dt в точности равна при $t > \tau$

$$dv(t) = \frac{p(\tau) d\tau}{m\omega} \sin \omega(t - \tau). \quad (6.1)$$

В этом выражении член $dv(t)$ представляет собой дифференциал реакции при дифференциале импульса для всего периода времени $t > \tau$; величина v не изменяется за интервал времени dt .

Можно принять, что весь процесс нагружения состоит из последовательного ряда таких кратковременных импульсов и каждый импульс вызывает дифференциальную реакцию в виде выражения (6.1). Полная реакция упруго-линейной системы может быть получена суммированием всех дифференциальных реакций в течение времени действия нагрузки, что приводит к интегрированию выражения (6.1):

$$v(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (6.2)$$

Уравнение (6.2) широко известно как *интеграл Дюамеля* для недемпфированной системы. Его можно использовать для вычисления реакции системы с одной степенью свободы без учета затухания при любом виде динамической нагрузки $p(t)$. Для произвольных нагрузок интеграл следует определять численными методами. Уравнение (6.2) может быть также представлено в виде

$$v(t) = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (6.3)$$

где введено новое обозначение

$$h(t - \tau) \equiv \frac{1}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (6.4)$$

Выражение (6.3) называется *интегралом свертки*. Вычисление реакции сооружения при произвольной нагрузке с использованием этого интеграла известно как временной анализ реакции. Функция $h(t - \tau)$ обычно определяется как реакция на единичный импульс (в данном случае для недемпфированной системы), поскольку она характеризует реакцию системы при импульсе с единичной амплитудой, приложенном в момент времени $t = \tau$.

В выражении (6.3) предполагалось, что нагружение начинается с момента времени $t = 0$ и система находится в состоянии покоя. Для других начальных условий $v(0) \neq 0$ и $\dot{v}(0) \neq 0$ в уравнение реакции необходимо добавить член, характеризующий свободные колебания. Тогда общее решение имеет вид

$$v(t) = \frac{\dot{v}(0)}{\omega} \sin \omega t + v(0) \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (6.5)$$

6.2. ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ БЕЗ ЗАТУХАНИЯ

Если функция приложенной нагрузки интегрируема, то реакция сооружения может быть определена формальным интегрированием уравнения (6.2) или (6.5). Для большинства практических случаев нагрузка определяется непосредственно по результатам экспери-

мента и реакцию следует вычислять численными методами. В этом случае полезно использовать тригонометрическое соотношение

$$\sin(\omega t - \omega \tau) = \sin \omega t \cos \omega \tau - \cos \omega t \sin \omega \tau$$

и представить уравнение (6.2) в виде (при нулевых начальных условиях)

$$v(t) = \sin \omega t \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \cos \omega t \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

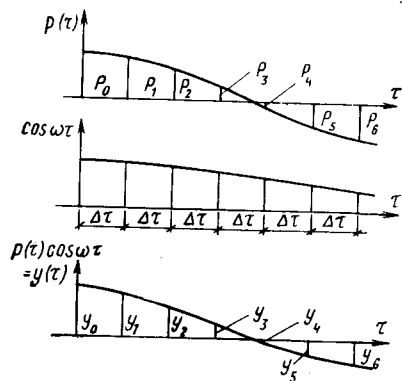


Рис. 6.2. Представление численного процесса суммирования для определения интеграла Дюамеля

функция графически изображена на рис. 6.2. Для удобства процесса вычисления значения функции определены с равными интервалами времени $\Delta\tau$ и им даны соответствующие индексы. Теперь величина интеграла может быть определена приближенно простым суммированием этих ординат, умноженных на соответствующие весовые коэффициенты. В математической форме получаем:

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t y(\tau) d\tau \approx \frac{\Delta\tau}{m\omega} \frac{1}{\zeta} \sum_{\zeta}^{\bar{A}}(t), \quad (6.8)$$

где $y(\tau) = p(\tau)\cos \omega\tau$ и $(1/\zeta)\sum_{\zeta}^{\bar{A}}$ характеризует численный процесс суммирования, форма которого определяется порядком принятой схемы интегрирования. Для трех методов приближенного вычисления эти суммы имеют следующий вид.

Простое суммирование ($\zeta = 1$)

$$\sum_1^{\bar{A}}(t) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{N-1}. \quad (6.9a)$$

Правило трапеций ($\zeta = 2$)

$$\sum_2^{\bar{A}}(t) = y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{N-1} + y_N. \quad (6.9б)$$

Правило Симпсона ($\zeta = 3$)

$$\sum_3^{\bar{A}}(t) = y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_{N-1} + y_N, \quad (6.9в)$$

где $N = t/\Delta\tau$ для правила Симпсона — четное число.

Использование любого процесса суммирования (6.9) для интеграла (6.8) приводит к приближенному значению интеграла для принятого значения времени t . Однако, как правило, необходимо знать не только перемещение в определенный момент времени, но и для всего процесса реакции системы. Другими словами, реакцию необходимо последовательно вычислять в моменты времени t_1, t_2, \dots с интервалом $\Delta\tau$ (или $2\Delta\tau$ по правилу Симпсона). Для получения полного процесса реакции более удобно представить суммы (6.9) в форме приращений:

простое суммирование ($\zeta = 1$)

$$\sum_1^{\bar{A}}(t) = \sum_1^{\bar{A}}(t - \Delta\tau) + p(t - \Delta\tau) \cos \omega(t - \Delta\tau); \quad (6.10a)$$

правило трапеций ($\zeta = 2$)

$$\sum_2^{\bar{A}}(t) = \sum_2^{\bar{A}}(t - \Delta\tau) + [p(t - \Delta\tau) \cos \omega(t - \Delta\tau) + p(t) \cos \omega t]; \quad (6.10б)$$

правило Симпсона ($\zeta = 3$)

$$\begin{aligned} \sum_3^{\bar{A}}(t) = \sum_3^{\bar{A}}(t - 2\Delta\tau) + [p(t - 2\Delta\tau) \cos \omega(t - 2\Delta\tau) + \\ + 4p(t - \Delta\tau) \cos \omega(t - \Delta\tau) + p(t) \cos \omega t], \end{aligned} \quad (6.10в)$$

где $\sum_{\zeta}^{\bar{A}}(t - \Delta\tau)$ — результат суммирования для предшествующего интервала времени $t - \Delta\tau$.

Определение интеграла $\bar{B}(t)$ выполняется аналогично:

$$\bar{B}(t) = \frac{\Delta\tau}{m\omega} \frac{1}{\zeta} \sum_{\zeta}^{\bar{B}}(t), \quad (6.11)$$

где $\sum_{\zeta}^{\bar{B}}(t)$ находится как для выражения (6.10) с заменой косинусов на синусы.

Подставляя (6.8) и (6.11) в уравнение (6.6), получаем общую реакцию системы без учета затухания

$$v(t) = \frac{\Delta\tau}{m\omega} \frac{1}{\zeta} \left[\sum_{\bar{A}}^{\bar{A}}(t) \sin \omega t - \sum_{\bar{B}}^{\bar{B}}(t) \cos \omega t \right]. \quad (6.12)$$

Пример 6.1. В качестве примера численного определения интеграла Дюамеля рассмотрим динамическую реакцию водонапорной башни при нагрузке от взрыва. Модель конструкции и схема нагрузки показаны на рис. 6.3. Для этой системы частота и период собственных колебаний равны:

$$\omega = \sqrt{kg/W} = \begin{cases} \sqrt{(2700 \cdot 32,3)/96,6} = 30 \text{ рад/с.} \\ \sqrt{40,2 \cdot 9,81/43,7} = 30 \text{ рад/с.} \end{cases}$$

$$T = 2\pi/\omega = 0,209 \text{ с.}$$

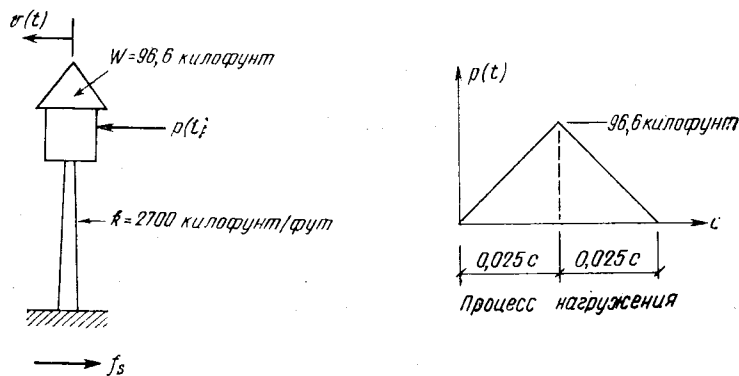


Рис. 6.3. Водонапорная башня при нагрузке от взрыва
 $W = 43,7 \text{ тс}$; $k = 40,2 \text{ тс/см}$

Приращение времени в процессе численного интегрирования принималось $\Delta\tau = 0,005 \text{ с}$, что соответствует приращению фазового угла при свободных колебаниях $\omega\Delta\tau = 0,15 \text{ рад}$ (по-видимому, использование большего шага приращений привело бы к тем же самым результатам). В данном анализе недемпфированной системы использовалось суммирование по правилу Симпсона, поэтому в уравнениях (6.10) — (6.12) принято $\zeta = 3$.

Результаты ручного счета для десяти шагов интегрирования реакции системы без затухания в удобной табличной форме даны на с. 92 (см. табл. 6.1). Операции, выполняемые в каждом столбце, обозначены символами в его заголовке. $\bar{\Delta A}$ и $\bar{\Delta B}$ представляют собой суммы трех слагаемых в столбцах 7 или 12, как показано фигурными скобками. Столбец 17 состоит из величин уравнения (6.12) в квадратных скобках, а перемещения в столбце 18 получены умножением столбца 17 на $G = \Delta\tau/m\omega\zeta$. Силы в последнем столбце равны: $f_s = kv(t)$. Следует отметить, что расчеты выполнены с помощью логарифмической линейки, и поэтому их результаты при определении разностей больших чисел весьма приближены. Поскольку нагрузка от взрыва определяется в конце десяти интервалов времени, величины \bar{A} и \bar{B} остаются постоянными. Если эти постоянные значения интегралов обозначить \bar{A}^* и \bar{B}^* , то свободные колебания при нагрузке от взрыва определяются выражени-

ем $v(t) = \bar{A}^* \sin \omega t - \bar{B}^* \cos \omega t$, а амплитуда колебаний $v_{\text{макс}} = [(\bar{A}^*)^2 + (\bar{B}^*)^2]^{1/2}$.

Интеграл Дюамеля можно легко вычислить при помощи формального интегрирования для указанной схемы нагружения, но преимущество численного метода заключается в том, что его можно применять при произвольном процессе нагружения, даже когда нагрузки определены экспериментально и не могут быть представлены в аналитической форме.

6.3. РЕАКЦИЯ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ЗАТУХАНИЯ

Форма интеграла Дюамеля, выражающая реакцию системы с учетом затухания, при динамическом нагружении общего типа абсолютно эквивалентна анализу системы без учета колебания, за исключением того, что свободные колебания, вызванные импульсом дифференциала нагрузки $p(\tau)d\tau$, испытывают затухание по экспоненте. Таким образом, полагая $v(0) = 0$ и $\dot{v}(0) = [p(\tau)d\tau]/m$, из уравнения (2.26) получаем:

$$dv(t) = e^{-\xi\omega(t-\tau)} \left[\frac{p(\tau)d\tau}{m\omega_D} \sin \omega_D(t-\tau) \right], \quad t > \tau, \quad (6.13)$$

где затухание по экспоненте начинается с момента приложения нагрузки, т. е. с $t = \tau$.

Суммируя члены в виде дифференциалов реакций в период всего времени приложения нагрузки, получаем выражение

$$v(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau, \quad (6.14)$$

которое является эквивалентом уравнения (6.2) для реакции демпфированной системы.

Сравнение выражения (6.14) с интегралом свертки (6.3) показывает, что реакция демпфированной системы на единичный импульс равна:

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau). \quad (6.15)$$

Для численного определения реакции демпфированной системы уравнение (6.14) может быть записано в виде, аналогичном (6.6):

$$v(t) = A(t) \sin \omega_D t - B(t) \cos \omega_D t, \quad (6.16)$$

где

$$A(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) \frac{e^{\xi\omega\tau}}{e^{\xi\omega t}} \cos \omega_D \tau d\tau;$$

$$B(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) \frac{e^{\xi\omega\tau}}{e^{\xi\omega t}} \sin \omega_D \tau d\tau. \quad (6.17)$$

Таблица 6.1. Численный анализ интеграла Дюамеля для недемпфированной системы на рис. 6.3.

$$\omega = \sqrt{\frac{kg}{W}} = 30 \text{ рад/с}, \quad \Delta t = 0,005 \text{ с}, \quad \omega \Delta t = 0,15 \text{ рад} = 8,59^\circ; \quad G = \frac{\Delta t}{\pi \omega \xi} = 1,852 \cdot 10^{-5}; \quad k = 2700 \text{ килофунтов/фут} = 40,2 \text{ тс/см}$$

t, с	p(t), килофунты	Определение А				Определение В				(14)×(4)	(15)-(16)	f _s (t)=k×(18), килофунты							
		sin ωt	cos ωt	произведение		ΔA	ΔB	произведение											
				(2)×(4)	(5)×(6)			(10)×(11)	(9)×(3)										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
0,000	0	0	1,000	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,005	19,32	0,150	0,989	19,09	4	76,4	113,3	0	2,9	4	11,6	23,0	0	0	0	0	0	0	0
0,010	38,64	0,295	0,955	36,9	1	36,9	309,1	113,3	11,4	1	11,4	155,8	23,0	33,4	22,0	11,4	0,0002	0,57	0,57
0,015	57,96	0,435	0,901	52,1	4	208,4	396,2	422,4	25,2	4	100,8	374,1	178,8	238,2	147,8	90,4	0,0017	4,52	4,52
0,020	77,28	0,564	0,826	63,8	1	63,8	818,6	818,6	43,6	1	43,6	298,5	552,9	641,0	344,2	296,8	0,0055	14,84	14,84
0,025	96,60	0,677	0,736	71,1	4	284,4	176,2	994,8	67,5	4	270,0	111,6	851,4	928	309,6	618	0,0114	30,9	30,9
0,030	77,28	0,783	0,622	48,0	1	48,0	1025,8	1025,8	50,5	4	202,0	0	963,0	1022	69	953	0,0176	47,6	47,6
0,035	57,96	0,870	0,493	28,55	4	114,2	31,0	0	36,0	1	36,0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,040	38,64	0,932	0,363	14,03	1	14,0	0	0	18,9	4	75,6	0	0	0	0	0	0	0	0
0,045	19,32	0,976	0,220	4,25	4	17,0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,050	0	0,997	0,0715	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 6.2. Численный анализ интеграла Дюамеля с учетом затухания

Исходные данные—рис. 6.3 и табл. 6.1; затухание—5% критического; множители— $\exp(-2\xi\omega\Delta t) = \exp(0,015) = 0,985$ и $4 \exp(-\xi\omega\Delta t) = 4 \exp(-0,0075) = 3,97$

t, с	p(t), килофунты	Определение А				Определение В				(14)×(4)	(15)-(16)	f _s (t)=k×(18), килофунты							
		sin ωt	cos ωt	произведение		A	произведение												
				(2)×(4)	(5)+(A)		(6)×(5) или (7)	(10)+B	(11)×(10) или (12)				(2)×(3)						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
0,000	0	0	1,000	0	0,985	0	0	0	0	0,985	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,005	19,32	0,150	0,989	19,1	3,97	...	75,7	...	2,9	3,97	...	11,5	...	0	0	0	0	0	0
0,010	38,64	0,295	0,955	36,9	0,985	149,5	147,3	112,6	11,4	0,985	34,3	33,8	22,9	33,2	21,9	11,5	0,0002	0,56	0,56
0,015	57,96	0,435	0,901	52,1	3,97	...	207	...	25,2	3,97	...	100	...	0	0	0	0	0	0
0,020	77,28	0,564	0,826	63,8	0,985	482	475	418	43,6	0,985	221,0	218	177,4	236	147	89	0,0016	4,45	4,45
0,025	96,60	0,677	0,736	71,1	3,97	...	282	...	67,5	3,97	...	268	...	0	0	0	0	0	0
0,030	77,28	0,783	0,622	48,0	0,985	853	840	805	60,5	0,985	606	596	546	630	340	290	0,0054	14,50	14,50
0,035	57,96	0,870	0,493	28,6	3,97	...	113,2	...	50,5	3,97	...	200	...	0	0	0	0	0	0
0,040	38,64	0,932	0,363	14,0	0,985	981	966	967	36,0	0,985	868	854	832	900	302	598	0,0111	29,9	29,9
0,045	19,32	0,976	0,220	4,25	3,97	...	16,9	...	18,9	3,97	...	75	...	0	0	0	0	0	0
0,050	0	0,997	0,0715	0	0,985	983	0	0,985	981	66	915	0,0169	45,7	45,7

Эти интегралы можно определить методами численного суммирования приращений, эквивалентными ранее рассмотренным, но с учетом экспоненциального затухания процесса. Первый интеграл равен:

$$A(t) \approx \frac{\Delta\tau}{m\omega_D} \frac{1}{\zeta} \sum_{\xi}^A(t), \quad (6.18)$$

где суммирование для разных процессов производится указанными ранее методами:

простое суммирование ($\zeta = 1$):

$$\sum_1^A(t) = \left[\sum_1^A(t - \Delta\tau) + p(t - \Delta\tau) \cos \omega_D(t - \Delta\tau) \right] \exp(-\xi\omega_D\Delta\tau); \quad (6.19a)$$

правило трапеций ($\zeta = 2$):

$$\sum_2^A(t) = \left[\sum_2^A(t - \Delta\tau) + p(t - \Delta\tau) \cos \omega_D(t - \Delta\tau) \right] \exp(-\xi\omega_D\Delta\tau) + p(t) \cos \omega_D t; \quad (6.19б)$$

правило Симпсона ($\zeta = 3$):

$$\sum_3^A(t) = \left[\sum_3^A(t - 2\Delta\tau) + p(t - 2\Delta\tau) \cos \omega_D(t - 2\Delta\tau) \right] \exp(-\xi\omega_D 2\Delta\tau) + 4p(t - \Delta\tau) \cos \omega_D(t - \Delta\tau) \exp(-\xi\omega_D\Delta\tau) + p(t) \cos \omega_D t. \quad (6.19в)$$

Интеграл $B(t)$ определяется аналогичными выражениями и включает функции синусов.

Точность решения, достигаемая любым из указанных методов, безусловно, зависит от величины шага $\Delta\tau$. Как правило, для функции нагрузки и тригонометрических функций его следует выбирать достаточно малым. Обычно условие $\Delta\tau \leq T/10$ приводит к результатам с удовлетворительной точностью. Точность и объем вычислений возрастают с увеличением порядка процесса суммирования. Как правило, повышенная точность вычислений с использованием правила Симпсона делает его предпочтительным, несмотря на увеличение сложности расчетов.

Пример 6.2. Чтобы продемонстрировать, как удобным методом включить затухание в численное определение интеграла Дюамеля, повторим определение реакции системы на рис. 6.3, принимая параметр затухания 5% критического. Интегралы снова определяются суммированием по правилу Симпсона, и, таким образом, используются соотношение (6.19 в) и его эквивалент с синусоидальными членами. Для указанной системы со слабым затуханием частота собственных колебаний принята такой же, как для недемпфированной системы.

Результаты подсчета на логарифмической линейке первых десяти шагов интегрирования показаны в табл. 6.2. Коэффициенты затухания по экспоненте, которые характеризуют затухание в системе, для удобства вычислений объединены с множителями по правилу Симпсона. Коэффициент $\exp(-\xi\omega_D 2\Delta\tau)$ умножается на определенное ранее значение интеграла A (или B), суммированного с первой частью нового приращения. Поэтому эти два члена сум-

мируются в столбце 7 (или 12) перед умножением на параметр затухания. Затем для определения нового значения $A(t)$ суммируется столбец 8 ($t - 2\Delta\tau$) плюс столбец 8 ($t - \Delta\tau$) плюс столбец 5 (t). Аналогично $B(t) =$ столбец 13 ($t - 2\Delta\tau$) + столбец 13 ($t - \Delta\tau$) + столбец 5 (t).

Поскольку остальные вычисления полностью совпадают с расчетом недемпфированной системы, учет затухания приводит лишь к небольшому увеличению объема вычислений.

Графики изменения упругих восстанавливающих сил для демпфированной и недемпфированной систем, определенных с помощью ЭВМ для 46 шагов интегрирования, показаны на рис. 6.4.

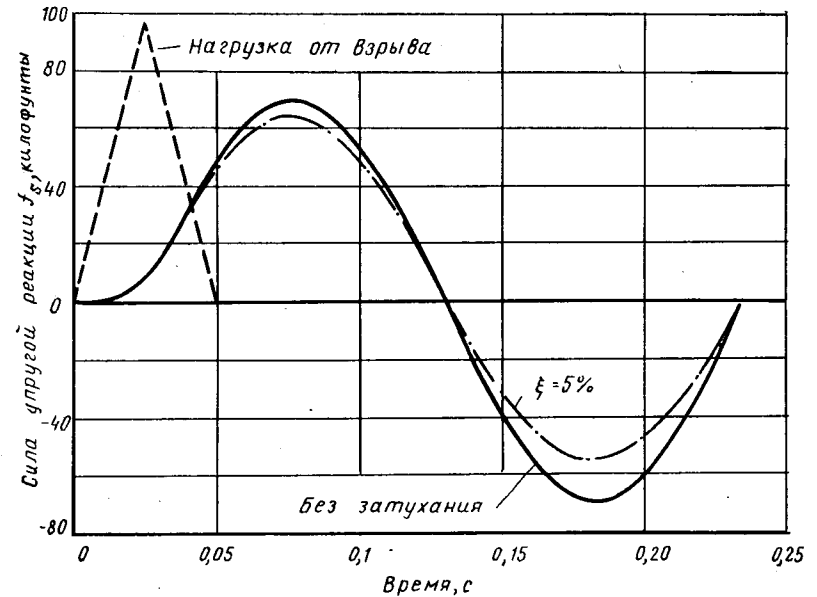


Рис. 6.4. Реакция водонапорной башни при нагрузке от взрыва

Их анализ показывает, что затухание оказывает небольшое влияние на первом этапе реакции, но вызывает заметное снижение максимума реакции и амплитуд следующих за ним циклов.

6.4. ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ РЕАКЦИИ СИСТЕМ

Хотя рассмотренный ранее временной анализ считается достаточно общим и может быть использован для определения реакции любой системы с одной степенью свободы при произвольном входном воздействии, в некоторых случаях более удобно выполнять частотный анализ реакции. Принцип частотного анализа аналогичен методу исследования реакции систем при периодической нагрузке, рассмотренному в гл. 4. Оба этих метода включают представление приложенной нагрузки в виде составляющих гармоник, определение реакции системы при каждой составляющей нагрузки и их последующее объединение для получения полной реакции системы. Однако для применения методики расчета при периодических произ-

вольных нагрузках необходимо расширить представление о рядах Фурье для случая непериодических функций. При этом подходе удобнее использовать компактную экспоненциальную форму рядов Фурье [см. выражения (4.6) и (4.7)].

Рассмотрим в качестве примера произвольную непериодическую нагрузку, показанную на рис. 6.5. Если эта функция может быть представлена в виде ряда Фурье, то коэффициенты c_n , получаемые интегрированием выражения (4.7) для интервала $0 < t < T_p$, будут определять периодическую функцию, показанную на рисунке как пунктирной, так и сплошной линией. Однако известно, что условно повторные нагрузки могут быть ограничены расширением до бесконечности периода действия нагрузки. Поэтому необходимо преобразовать выражение для ряда Фурье так, чтобы оно относилось к бесконечному интервалу времени. Для этого удобнее сначала переписать выражения (4.6) и (4.7) в немного измененном виде, используя следующие обозначения:

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\bar{\omega}_1}{2\pi} \equiv \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi}; \quad n\bar{\omega}_1 = n\Delta\bar{\omega} \equiv \bar{\omega}_n;$$

$$c_n \equiv \frac{1}{T_p} c(\bar{\omega}_n) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} c(\bar{\omega}_n).$$

С учетом новых обозначений выражения (4.6) и (4.7) для ряда Фурье примут вид:

$$p(t) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(\bar{\omega}_n) \exp(i\bar{\omega}_n t); \quad (6.20)$$

$$c(\bar{\omega}_n) = T_p c_n = \int_{t=-T_p/2}^{t=T_p/2} p(t) \exp(-i\bar{\omega}_n t) dt. \quad (6.21)$$

Удобство такого представления заключается в том, что пределы интегрирования произвольны настолько, что они могут охватить один цикл приложения нагрузки. Если теперь увеличить период нагрузки до бесконечности ($T_p \rightarrow \infty$), то приращение частот становится бесконечно малым ($\Delta\bar{\omega} \rightarrow d\bar{\omega}$) и дискретные частоты $\bar{\omega}_n$ становятся непрерывной функцией $\bar{\omega}$. В пределе выражение (6.20) для расширенного ряда Фурье переходит в следующий интеграл Фурье:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\omega}=-\infty}^{\infty} c(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega}, \quad (6.22)$$

где функция амплитуд определяется соотношением

$$c(\bar{\omega}) = \int_{t=-\infty}^{\infty} p(t) \exp(-i\bar{\omega}t) dt. \quad (6.23)$$

Два интервала (6.22) и (6.23) известны как *парные преобразования Фурье*, поскольку с помощью эквивалентных преобразований временная функция может быть получена из функции частоты и наоборот. Необходимым условием существования преобразования Фурье является сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} |p(t)| dt$.

По аналогии с выражением (6.20) для ряда Фурье интеграл Фурье (6.22) может рассматриваться как представление произвольной нагрузки в виде бесконечной суммы гармоник, где $(1/2\pi) \times c(\bar{\omega})$ определяет амплитуду на единицу $\bar{\omega}$ для составляющей нагрузки с частотой $\bar{\omega}$. Умножая это выражение на комплексную передаточную функцию $H(\bar{\omega})$, можно получить амплитуду на единицу $\bar{\omega}$ реакции системы при компоненте с частотой $\bar{\omega}$. Отсюда полная реакция системы получается суммированием этих реакций на отдельные компоненты по всему диапазону частот. Выражение этого принципа в математической форме приводит к основному уравнению частотного анализа реакции систем

$$v^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\omega}=-\infty}^{\infty} H(\bar{\omega}) c(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega}. \quad (6.24)$$

Для использования частотного анализа необходимо с помощью (6.23) определить гармонические составляющие заданной нагрузки и использовать комплексную передаточную функцию для системы с одной степенью свободы [см. выражение (4.11)].

Пример 6.3. В качестве примера частотного анализа реакции системы рассмотрим прямоугольный импульс на рис. 5.4: $p(t) = p_0$ для $0 < t < t_1$, $p(t) = 0$ для других значений. Преобразование Фурье для этой нагрузки [см. (6.23)] имеет вид

$$c(\bar{\omega}) = \frac{p_0}{-i\bar{\omega}} [\exp(-i\bar{\omega}t) - 1]. \quad (a)$$

Подставляя это выражение и соотношение (4.11) для комплексной передаточной функции в (6.24), получаем реакцию в интегральной форме

$$v(t) = \frac{i\bar{\omega}_D}{2\pi k} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\beta(t_1-t)}}{\beta(\beta-\gamma_1)(\beta-\gamma_2)} d\beta - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\beta t}}{\beta(\beta-\gamma_1)(\beta-\gamma_2)} d\beta \right], \quad (б)$$

где

$$\gamma_1 = \xi i + \sqrt{1-\xi^2}; \quad \gamma_2 = \xi i - \sqrt{1-\xi^2}. \quad (в)$$

Интегралы в выражении (в) можно легко определить интегрированием в комплексной плоскости β , что приводит к

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{p_0}{k} \left[1 - e^{-\xi\omega t} \left(\cos \omega_D t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D t \right) \right] & 0 < t < t_1 \\ \frac{p_0}{k} e^{-\xi\omega(t-t_1)} \times \\ \times \left\{ \left[e^{-\xi\omega t_1} \left(\sin \omega_D t_1 - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos \omega_D t_1 \right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right] \sin \omega_D (t-t_1) + \right. \\ \left. + \left[1 - e^{-\xi\omega t_1} \left(\cos \omega_D t_1 + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D t_1 \right) \right] \cos \omega_D (t-t_1) \right\}, & t > t_1. \end{cases} \quad (r)$$

Эти результаты эквивалентны результатам временного анализа [см. выражения (5.7б) и (5.8)], за исключением того, что в настоящем анализе учтено затухание.

6.5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЧАСТОТНОГО АНАЛИЗА

Формальное применение методики частотного анализа, как показано в предыдущем примере, ограничено случаями, когда возможно преобразование Фурье для функций приложенной нагрузки. Но даже в этих случаях определение сходящихся интегралов представляется собой трудоемкий процесс. Для практического использования метода необходимо сформулировать принципы численного решения. Численное представление удобно разделить на два этапа: вывод уравнений для дискретного преобразования Фурье, которые соответствовали бы выражениям (6.22) и (6.23), и разработку эффективных численных методов этих преобразований. Рассмотрим каждый из этих этапов.

6.5.1. Дискретные преобразования Фурье. На первом этапе вывода уравнений предполагается, что нагрузка прикладывается периодически с периодом T_p . Это вносит приближение в описание произвольной нагрузки, но оно необходимо для замены неопределенного интеграла (6.23) конечной суммой. Выбор периода нагрузки также позволяет определить наименьшую частоту, которую необходимо рассматривать в анализе:

$$\bar{\omega}_1 = \Delta\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T_p}.$$

Затем период нагрузки разделяют на N равных интервалов времени Δt и нагрузку определяют для дискретных моментов времени $t_m = m\Delta t$. С учетом этих соотношений экспоненциальный член в (6.20) записывают в виде

$$\exp(i\bar{\omega}_n t_m) = \exp(in\Delta\bar{\omega}m\Delta t) = \exp\left(2\pi i \frac{nm}{N}\right)$$

и выражение (6.20) принимает дискретную форму

$$p(t_m) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} c(\bar{\omega}_n) \exp\left(2\pi i \frac{nm}{N}\right), \quad (6.25)$$

в которой наибольшая частота произвольно устанавливается при $(N-1)\Delta\bar{\omega}$.

Соответствующее дискретное выражение для амплитуды функции $c(\bar{\omega}_n)$ может быть получено подстановкой суммы конечного числа членов ряда в интеграл (6.21), откуда

$$c(\bar{\omega}_n) = \Delta t \sum_{m=0}^{N-1} p(t_m) \exp\left(-2\pi i \frac{nm}{N}\right). \quad (6.26)$$

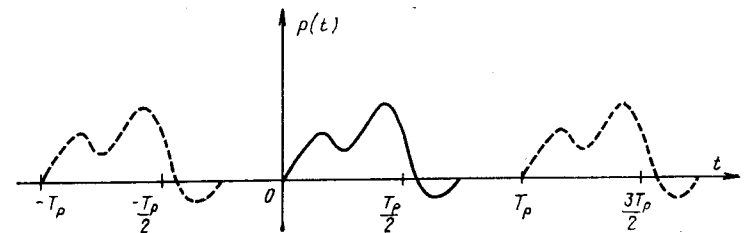


Рис. 6.5. Произвольная нагрузка, представляемая рядами Фурье

Выражения (6.25) и (6.26) являются парой дискретного преобразования Фурье, которые соответствуют непрерывным преобразованиям (6.22) и (6.23). При применении дискретных преобразований необходимо помнить, что они основаны на допущении о периодичности нагрузки. Для уменьшения ошибок при анализе непериодических нагрузок период нагрузки может быть расширен включением в T_p продолжительного интервала нулевого нагружения. Получаемый в результате процесс нагружения может иметь вид, как показано на рис. 6.5.

6.5.2. Быстрое преобразование Фурье. Вычисление сумм, входящих в два уравнения дискретного преобразования Фурье, значительно упрощается в связи с тем, что экспоненциальные функции гармонические, а число их порядка N^2 . В экспонентах используются только дискретные величины m и n , и небольшие преимущества могут быть использованы путем удвоения величин при записи сумм дискретного преобразования Фурье. Необходимо рассмотреть особенности составления программ для ЭВМ при оптимизации полного анализа с использованием дискретных преобразований Фурье. Хотя такой анализ выходит за рамки настоящего краткого описания, его полезно сделать для объяснения принципа, лежащего в основе быстрого преобразования Фурье. Этот сравнительно новый вычислительный метод настолько эффективный и производительный, что он сде-

лал частотный анализ с вычислительной точки зрения конкурентно-способным с традиционным методом временного анализа и таким образом существенно расширил область динамики сооружений. Для целей настоящего анализа любое из пары дискретных преобразований Фурье может быть представлено в виде

$$B_m = \sum_{n=0}^{N-1} A_n W_N^{nm}, \quad (6.27)$$

$$\text{где } W_N = e^{2\pi i/N}. \quad (6.28)$$

Вычисление суммы будет наиболее эффективным, если число приращений времени N , на которые делится период нагрузки T_p , имеет порядок M^2 , т. е. $N = M^2$. В этом случае целые числа m и n могут быть представлены в двоичной системе:

$$\left. \begin{aligned} m &= m_0 + 2m_1 + 4m_2 + \dots + 2^{M-1}m_{M-1}; \\ n &= n_0 + 2n_1 + 4n_2 + \dots + 2^{M-1}n_{M-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

где коэффициенты m_j и n_j равны 0 или 1.

С учетом этих двоичных обозначений зависимость (6.27) записывается в виде

$$B(m) = \sum_{n_0=0}^1 \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^1 \dots \sum_{n_{M-1}=0}^1 \times \\ \times A(n) W_N^{(m_0+2m_1+4m_2+\dots)(n_0+2n_1+\dots)}. \quad (6.30)$$

Преимущество двоичной системы будет проиллюстрировано при рассмотрении очень простого случая, когда период нагрузки делится на восемь равных интервалов времени, т. е. $N = 8$, $M = 3$. При этом соотношение (6.30) становится равным:

$$B(m) = \sum_{n_0=0}^1 \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^1 A(n) W_8^{(m_0+2m_1+4m_2)(n_0+2n_1+4n_2)}. \quad (6.31)$$

Можно также записать экспоненциальный член в виде

$$W_8^{mn} = W_8^8 (m_1 n_2 + 2m_2 n_2 + m_2 n_1) W_8^{4n_2 m_0} W_8^{2n_1 (2m_1 + m_0)} W_8^{n_0 (4m_2 + 2m_1 + m_0)}.$$

Первый член правой части равен единице, так как

$$W_8^8 (\text{целое}) = \exp [2\pi i (8/8) (\text{целое})] \equiv 1.$$

Следовательно, при суммировании необходимо рассмотреть только три оставшихся члена. Они могут быть рассмотрены последовательно введением новых символов для обозначения последовательных этапов процесса суммирования. Тогда первый этап будет обозначен

$$A_1(m_0, n_1, n_0) = \sum_{n_2=0}^1 A(n_2, n_1, n_0) W_8^{n_2 m_0}. \quad (6.32a)$$

Аналогично второй этап

$$A_2(m_0, m_1, n_0) = \sum_{n_1=0}^1 A_1(m_0, n_1, n_0) W_8^{2n_1 (2m_1 + m_0)}. \quad (6.32b)$$

И, наконец, третий этап (последний, так как $M = 3$)

$$B(m_0, m_1, m_2) = \sum_{n_0=0}^1 A_2(m_0, m_1, n_0) W_8^{n_0 (4m_2 + 2m_1 + m_0)}. \quad (6.32b)$$

Этот процесс особенно эффективен, поскольку результаты первого этапа сразу используются на следующем этапе вычисления (что сводит к минимуму объем оперативной памяти), а также экспоненты принимают значение единицы в первом слагаемом каждой суммы. Дальнейшие преимущества следует рассматривать как результат гармонического характера экспоненты, т. е. $W_8^8 = -W_8^4$; $W_8^4 = -W_8^2$; $W_8^2 = -W_8$ и т. д. Уменьшение объема вычислений, определяемых этой формой записи, становится очень большим, когда интервал времени делится на большое число приращений. Например, при $N = 1024$ алгоритм быстрого преобразования Фурье требует только полпроцента объема вычислений, необходимых для непосредственного определения выражения (6.27).

ГЛАВА 7

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕАКЦИИ СООРУЖЕНИЙ

7.1. МЕТОДИКА АНАЛИЗА

При анализе упругих систем в случае произвольных динамических нагрузок использование интеграла Дюамеля или частотного анализа, рассмотренных в гл. 6, в большинстве случаев обеспечивает возможность определения реакции сооружений. Однако эти методы применимы *только* при анализе упругих систем, динамические характеристики которых остаются постоянными в течение всего процесса реакции, поскольку в основу обоих методов положен принцип суперпозиции отдельных составляющих. Но существует большой класс задач динамики сооружений, в которых системы нельзя рассматривать как упругие. Например, реакция зданий при землетрясении может быть достаточно интенсивной, что приводит к серьезным повреждениям конструкций. Поэтому необходимо разработать другие методы расчета, применимые для неупругих систем.

Вероятно, самая эффективная методика неупругого анализа — шаговое интегрирование уравнений колебаний. При таком подходе реакция сооружений вычисляется для ряда последовательных интервалов времени Δt , которые выбираются исходя из удобства вычислительного процесса. Условия динамического равновесия устанавливаются в начале и в конце каждого интервала времени, а дви-

жение системы в течение этого промежутка времени определяется приближенно с учетом предполагаемого характера реакции системы (при этом влиянием нарушения условий динамического равновесия внутри интервалов времени, как правило, пренебрегают).

Неупругий характер работы конструкций учитывается определением новых динамических характеристик, соответствующих измененному деформированному состоянию, в начале каждого интервала времени. Полная реакция системы определяется в процессе интегрирования уравнений с принятием значений скорости и перемещения в конце определенного интервала времени в качестве начальных условий для следующего интервала. Таким образом, процесс вычислений является шаговым и может продолжаться от начального момента приложения нагрузки до любого момента времени с аппроксимацией неупругой работы конструкций рядом последовательно изменяющихся упругих систем.

7.2. УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ В ПРИРАЩЕНИЯХ

Система с одной степенью свободы, рассматриваемая в данном разделе, показана на рис. 7.1, а. Параметры системы m , k , c и $p(t)$ могут рассматриваться не как локальные характеристики отдельных устройств, показанных на рисунке, а в качестве обобщенных параметров (см. разд. 1.5). Силы, действующие на массу системы, показаны на рис. 7.1, б, обобщенные нелинейные характеристики сил в пружине и сил затухания — соответственно на рис. 7.1, в и 7.1, г, а произвольная динамическая нагрузка — на рис. 7.1, д.

Для любого момента времени t из равновесия сил, действующих на массу m , получаем:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t), \quad (7.1a)$$

а через короткий промежуток времени Δt соответственно

$$f_I(t + \Delta t) + f_D(t + \Delta t) + f_S(t + \Delta t) = p(t + \Delta t). \quad (7.16)$$

Подставляя равенство (7.1a) в (7.16), получаем уравнение колебаний для момента времени в форме приращений

$$\Delta f_I(t) + \Delta f_D(t) + \Delta f_S(t) = \Delta p(t). \quad (7.2)$$

Приращения сил в этом уравнении могут быть выражены следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_I(t) &= f_I(t + \Delta t) - f_I(t) = m \Delta \ddot{v}(t); \\ \Delta f_D(t) &= f_D(t + \Delta t) - f_D(t) = c(t) \Delta \dot{v}(t); \\ \Delta f_S(t) &= f_S(t + \Delta t) - f_S(t) = k(t) \Delta v(t); \\ \Delta p(t) &= p(t + \Delta t) - p(t), \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

при выводе которых предполагалось, что масса системы остается постоянной, а $c(t)$ и $k(t)$ характеризуют параметры затухания и жесткости, соответствующие скорости и перемещению в течение интер-

вала времени, как показано на рис. 7.1, в и 7.1, г. Практически указанные углы наклона секущих могут быть определены с помощью процесса итерации, так как скорость и перемещение в конце каждого приращения времени зависят от величин этих углов. Поэтому вместо них часто используются углы наклона касательных, которые определяются для начала каждого интервала:

$$c(t) \approx \left(\frac{df_D}{d\dot{v}} \right)_t; \quad k(t) \approx \left(\frac{df_S}{dv} \right)_t. \quad (7.4)$$

После подстановки выражений для сил (7.3) в условие (7.2) получаем окончательную форму записи уравнений равновесия в приращениях для момента времени t :

$$m \Delta \ddot{v}(t) + c(t) \Delta \dot{v}(t) + k(t) \Delta v(t) = \Delta p(t). \quad (7.5)$$

Характеристики материалов, рассматриваемые в настоящем анализе, могут включать в себя нелинейности произвольного вида. Например, сила упругости пружины f_s не обязательно должна зависеть только от перемещений, как для нелинейно-упругого мате-

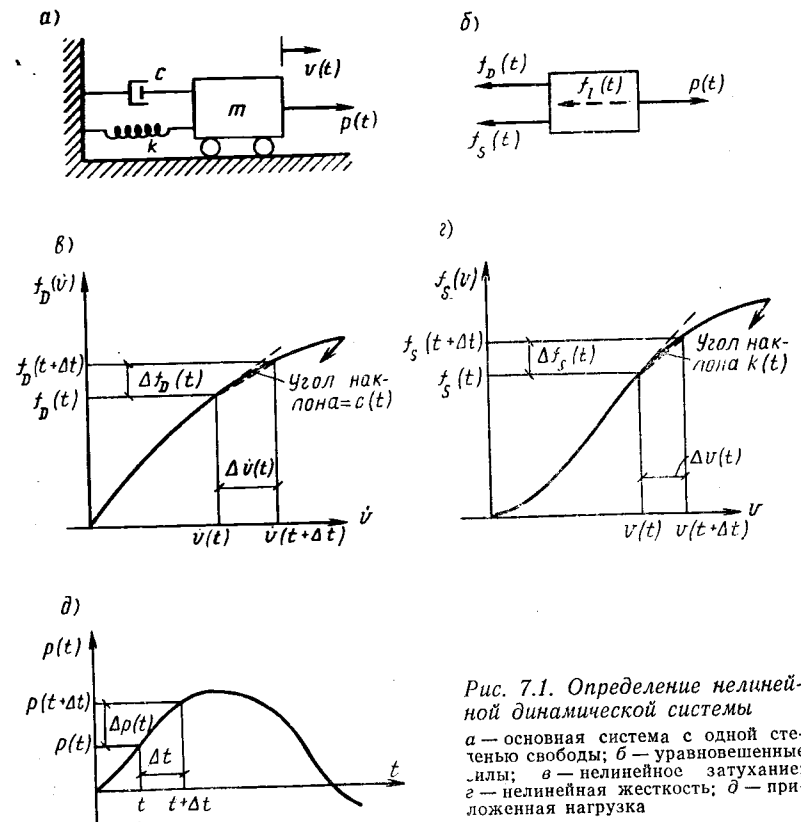


Рис. 7.1. Определение нелинейной динамической системы
 а — основная система с одной степенью свободы; б — уравновешенные силы; в — нелинейное затухание; г — нелинейная жесткость; д — приложенная нагрузка

риала. Нелинейный гистерезисный характер работы материала конструкций может определяться как всей историей деформирования, так и текущим распределением перемещений. Единственное требование заключается в необходимости задания жесткостных характеристик, хорошо определяющих историю нагружения и текущее состояние. Более того, упрощающая предпосылка о постоянстве массы произвольна, так как масса также может рассматриваться как переменная во времени величина.

7.3. ШАГОВОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Для численного интегрирования уравнений (7.5) разработано много методов. Используемая нами методика по существу очень проста и приводит к хорошим результатам при сравнительно небольшом объеме вычислений. В качестве основной предпосылки принимается предположение о том, что в пределах каждого интервала времени ускорение изменяется линейно, а характеристики системы остаются постоянными. Движение массы и уравнения движения за этот интервал времени показаны на рис. 7.2. При этом изменение

ускорений принято линейным, а скорости и перемещения — соответственно по закону квадратной и кубической парабол. Вычисление этих параметров для конца интервала времени $\tau \equiv \Delta t$ приводит к следующим приращениям скорости и перемещения:

$$\Delta \dot{v}(t) = \ddot{v}(t) \Delta t + \Delta \ddot{v}(t) \frac{\Delta t}{2}; \quad (7.6a)$$

$$\Delta v(t) = \dot{v}(t) \Delta t + \ddot{v}(t) \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta \ddot{v}(t) \frac{\Delta t^2}{6}. \quad (7.6b)$$

Теперь удобно принять приращение перемещения в качестве основной переменной. Решая (7.6a) относительно приращения ускорения и подставляя его (7.6b), получаем:

$$\Delta \ddot{v}(t) = \frac{6}{\Delta t^2} \Delta v(t) - \frac{6}{\Delta t} \dot{v}(t) - 3\ddot{v}(t); \quad (7.7a)$$

$$\Delta \dot{v}(t) = \frac{3}{\Delta t} \Delta v(t) - 3\dot{v}(t) - \frac{\Delta t}{2} \ddot{v}(t). \quad (7.7b)$$

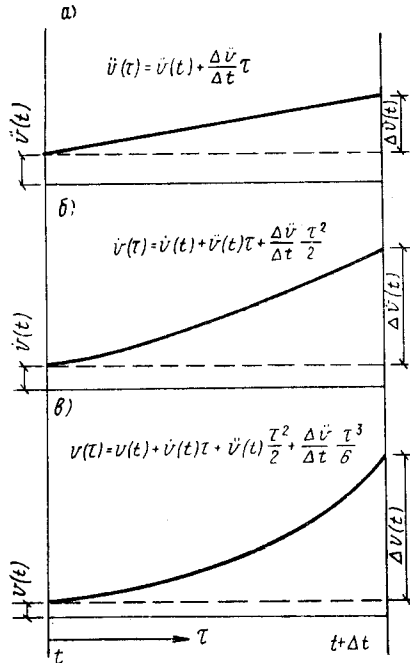


Рис. 7.2. Движение системы в интервале приращения времени (на основе метода линейного ускорения)
а — ускорение (линейное); б — скорость (квадратная зависимость); в — перемещение (кубическая зависимость)

После подстановки (7.7) в (7.5) получаем следующее выражение уравнения колебаний:

$$m \left[\frac{6}{\Delta t^2} \Delta v(t) - \frac{6}{\Delta t} \dot{v}(t) - 3\ddot{v}(t) \right] + c(t) \times \\ \times \left[\frac{3}{\Delta t} \Delta v(t) - 3\dot{v}(t) - \frac{\Delta t}{2} \ddot{v}(t) \right] + k(t) \Delta v(t) = \Delta p(t)$$

и, перенося в правую часть все члены, определяемые начальными условиями,

$$\tilde{k}(t) \Delta v(t) = \Delta \tilde{p}(t), \quad (7.8)$$

$$\text{где } \tilde{k}(t) = k(t) + \frac{6}{\Delta t^2} m + \frac{3}{\Delta t} c(t); \quad (7.9a)$$

$$\Delta \tilde{p}(t) = \Delta p(t) + m \left[\frac{6}{\Delta t} \dot{v}(t) + 3\ddot{v}(t) \right] + c(t) \left[3\dot{v}(t) + \frac{\Delta t}{2} \ddot{v}(t) \right]. \quad (7.9b)$$

Отметим, что уравнение (7.8) эквивалентно условиям статического равновесия в приращениях и может быть решено для приращения перемещения при делении приращения нагрузки на жесткость. Динамический характер работы учитывается добавлением членов инерционных и диссипативных нагрузок в эффективную нагрузку, а также параметров жесткости. После решения уравнения (7.8) относительно приращения перемещения его величина подставляется в (7.7b) для определения приращения скорости. Начальные условия для следующего шага интегрирования определяются прибавлением этих значений приращений к скорости и перемещению в начале рассматриваемого шага интегрирования.

Указанный численный процесс включает два существенных приближения, что ускорение изменяется линейно и что затухание и жесткость остаются постоянными в течение шага интегрирования. В принципе ни одна из этих предпосылок не является справедливой, хотя возникающие при этом ошибки малы, если шаг интегрирования принят достаточно малым. Поэтому погрешности, заложенные в условиях равновесия приращений параметров, могут накапливаться от шага к шагу. Такого накопления ошибок можно избежать, рассматривая полное уравнение равновесия на каждом этапе анализа. Этого можно достигнуть, если выразить ускорения в начале интервала времени через полную внешнюю нагрузку за вычетом значений полных сил упругости и затухания.

7.4. ОБЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ МЕТОДИКИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Для любого заданного приращения времени процесс состоит из следующих операций:

1. Начальная скорость $\dot{v}(t)$ и начальное перемещение $v(t)$ известны либо из величин в конце предыдущего приращения времени, либо из начальных условий задачи.

2. С учетом этих величин для принятого интервала времени определяются неупругие характеристики системы — затухание $c(t)$ и жесткость $k(t)$, а также текущие значения силы затухания $f_D(t)$ и силы упругости $f_S(t)$. [см., например, рис. 7.1 в и 7.1, г.]

3. Определяется начальное ускорение

$$\ddot{v}(t) = \frac{1}{m} [p(t) - f_D(t) - f_S(t)]. \quad (7.10)$$

Это выражение получено в результате приведения уравнения равновесия к моменту времени t .

4. В соответствии с (7.9) определяются приращение эффективной нагрузки $\Delta \tilde{p}(t)$ и эффективная жесткость $\tilde{k}(t)$.

5. С помощью (7.8) определяется приращение смещения, а с его использованием по (7.7б) — приращение скорости.

6. Наконец, скорость и перемещение в конце приращения времени равны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}(t + \Delta t) &= \dot{v}(t) + \Delta \dot{v}(t); \\ v(t + \Delta t) &= v(t) + \Delta v(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

После окончания операции 6 вычисления для данного интервала времени заканчиваются и можно приступить к циклу вычислений для следующего интервала. Очевидно, что процесс может последовательно выполняться для любого желаемого числа интервалов времени. Таким образом, определяется полная реакция для любой системы с одной степенью свободы при заданных нелинейных характеристиках. Упругие системы также можно рассчитывать по этой методике, принимая характеристики затухания и жесткости постоянными. Поэтому процесс счета становится несколько проще.

Точность рассмотренного шагового метода, как и любого процесса численного интегрирования, зависит от длины интервала времени Δt . При выборе этого интервала необходимо учитывать три фактора: скорость изменения внешней нагрузки $p(t)$, сложность характеристик нелинейных затухания и жесткости и период T собственных колебаний системы. Шаг интегрирования должен быть достаточно малым, чтобы обеспечить надежное определение всех указанных величин, последняя из которых связана со свободными колебаниями сооружения. Как правило, изменчивость характеристик конструкций не является определяющим фактором. Если происходит внезапное существенное изменение характеристик конструкций, например текучесть в упругопластической пружине, для точного учета этого явления может быть введен специальный, более короткий шаг интегрирования. Динамические особенности приложенных нагрузок также могут быть без особых затруднений учтены при выборе интервала времени.

Таким образом, если функция нагружения достаточно проста, выбор шага интегрирования определяется в основном периодом собственных колебаний сооружения. Метод линейного ускорения толь-

ко условно устойчивый и приводит к расходимости результатов, если шаг интегрирования превышает половину периода свободных колебаний. Шаг интегрирования для обеспечения устойчивости процесса вычислений и необходимой точности его результатов должен выбираться значительно меньше этой величины. Как правило, условие $\Delta t/T \leq \frac{1}{10}$ является эмпирическим правилом для получения надежных результатов. Если возникают сомнения в адекватности

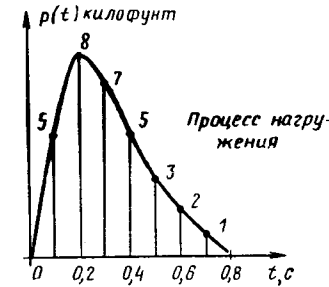
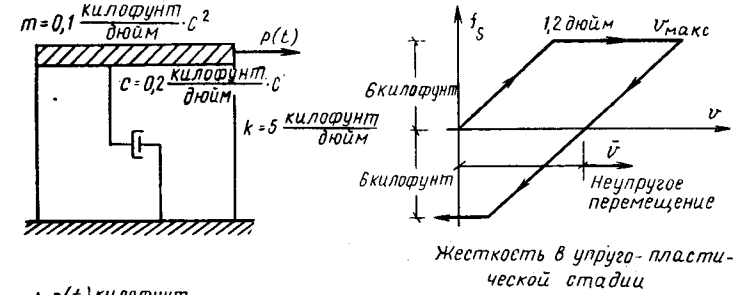


Рис. 7.3. Упруго-пластическая рама при динамическом нагружении
 k — общая жесткость ($k=5$ килофунтов/дюйм [0,892 тс/см])

полученного решения, необходимо провести анализ влияния интервала интегрирования. Если в процессе этого анализа выявлено, что реакция системы изменяется незначительно, можно считать, что ошибка в процессе численного интегрирования незначительна.

Пример 7.1. Для иллюстрации ручного счета при использовании шагового метода линейного ускорения определим реакцию упруго-пластической рамы как системы с одной степенью свободы при заданной нагрузке (рис. 7.3). Для настоящего анализа примем шаг интегрирования 0,1 с, который превышает величину, необходимую для достижения большей точности результатов, но вполне приемлем в рамках рассматриваемой задачи.

В настоящем примере коэффициент затухания принят постоянным, поэтому нелинейность системы определяется только изменением жесткости в соответствии с принятой упруго-пластической зависимостью. Тогда эффективная жесткость может быть представлена в виде [см. уравнения (7.9а)]

$$\tilde{k}(t) = k(t) + \frac{6}{0,1^2} m + \frac{3}{0,1} c = 66 + k(t),$$

где $k(t)$ равен 5 килофунт/дюйм [0,892 тс/см] или нулю соответственно для упругой и пластической стадии.

Приращение эффективной нагрузки определяется выражением (7.96)

$$\Delta \tilde{p}(t) = \Delta p(t) + \left(\frac{6m}{0,1} + 3c \right) \dot{v} + \left(3m + \frac{0,1}{2} c \right) \ddot{v} = \Delta p(t) + 6,6\dot{v} + 0,31\ddot{v}.$$

Счет с применением логарифмической линейки удобно выполнять, пользуясь формой записи в виде табл. 7.1.

Для рассматриваемой упругопластической системы реакция резко изменяется в начале и конце стадии текучести, и для получения наилучшей точности необходимо делить интервал времени, включающий точки перехода, на

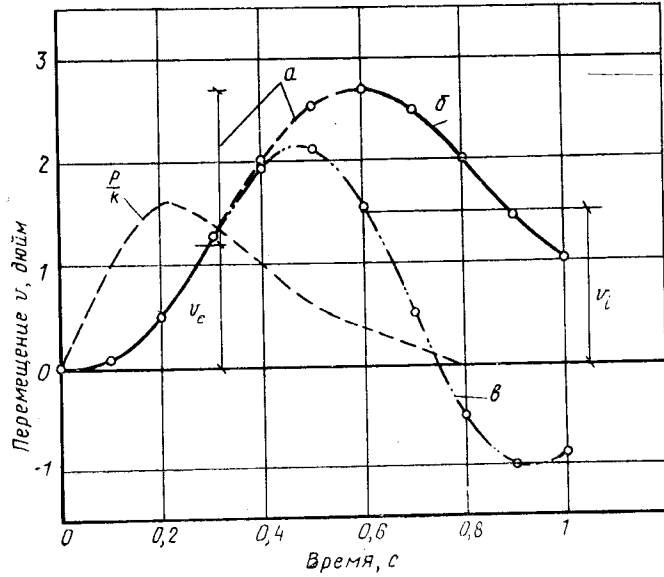


Рис. 7.4. Сравнение упругопластической и упругой реакции рамы (см. рис. 7.3)

P/k — статическое перемещение; v_e — предел упругости; v_i — неупругое перемещение; a — стадия текучести; $б$ — упруго-пластическая реакция; $в$ — упругая реакция

два подынтервала. Тогда характеристики системы принимаются постоянными для каждого подынтервала и результаты вычислений будут вполне точными. Однако для установления длин подынтервалов требуется проведение итеративного процесса. В настоящем примере такое уточнение не выполняется. Начальная жесткость предполагается постоянной в течение всего шага интегрирования, и при переходе от одной стадии деформирования к другой возможно появление существенных ошибок.

Динамическая реакция упругопластической системы, определенная в табл. 7.1, изображена на рис. 7.4, причем состояние текучести показано пунктиром. Для сравнения на рисунке изображена также реакция упругой системы, полученная шаговым методом при постоянных значениях $k = 71$ и $f_s = 5v$. Влияние пластического характера деформирования ясно видно из сравнения графиков. Остаточное перемещение (относительно которого будут происходить в последующем свободные колебания неупругой системы) составляет около 1,49 дюйма [3,78 см].

Следует также обратить внимание на характер нагрузки, которая представлена в виде статического перемещения p/k , т. е. прогиба, который будет развиваться в упругой системе при силах инерции и затухания, равных нулю.

Таблица 7.1. Анализ нелинейной реакции шаговым методом логарифмического ускорения

t, c	$p, \text{ дюйм}$	$v, \text{ дюйм}$	Δp	Δv	$\Delta \tilde{p}$	k	$k = 66 + (13)$	$\Delta v = (12) + (14)$	$30 \Delta v$	$3v$	$0,08v$	$\Delta v = (16) - (17) - (18)$
0,0	0	0	0	0	0	5	71	0,070	2,11	0	0	2,11
0,1	5	0,070	3	30,04	30,04	5	71	0,423	12,68	6,33	2,11	4,24
0,2	8	0,493	3	54,15	54,15	5	71	0,763	22,88	19,06	2,14	1,68
0,3	7	1,256	1	49,13	49,13	0*	66	0,744	22,33	24,08	0,30	1,45
0,4	5	2,000	2	34,24	34,24	0	66	0,519	15,57	19,74	1,16	3,01
0,5	3	2,519	1	23,56	23,56	0	66	0,168	5,02	10,72	1,85	3,85
0,6	2	2,687	1	1,85	1,85	5	71	0,212	-6,36	-0,84	-1,97	-3,55
0,7	1	2,475	1	-25,28	-25,28	5	71	0,465	-11,49	-13,95	-1,08	-1,38
0,8	0	2,010	0	-34,39	-34,39	5	71	0,554	-16,21	-15,63	-0,79	0,21
0,9	0	1,456	0	11,6	11,6	5	71	-0,414	-12,42	-15,00	0,58	2,00
1,0	0	1,042	0	3,60	3,60	5	71	-0,414	-12,42	-15,00	0,58	2,00

* $\ddot{v} = v - v_i$, где $v_i = v_{\text{макс}} - 1,2$ дюйма — неупругое перемещение.
** $k = 0$, когда рама находится в стадии пластических деформаций.

АНАЛИЗ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ РЕЛЕЯ

8.1. СУЩНОСТЬ МЕТОДА

Из рассмотренных вопросов анализа реакции систем при динамических нагрузках видно, что частота или период свободных колебаний системы с одной степенью свободы определяют характер ее динамической реакции. По этой причине целесообразно разработать простой метод определения частоты собственных колебаний для системы с одной степенью свободы. По-видимому, самым эффективным является метод Релея, рассматриваемый в данной главе.

По определению (2.5) частота собственных колебаний системы с одной степенью свободы без учета затухания равна:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8.1)$$

Это выражение непосредственно применимо к одномассовой системе с жесткостью пружины k и массой m . Оно может быть также использовано для любого сооружения, которое рассматривается как система с одной степенью свободы введением формы деформирования ψ . В этом случае параметры в (8.1) представляют собой обобщенную жесткость k^* и обобщенную массу m^* , определяемые выражениями (1.37) и (1.39).

Хотя принцип обобщенных координат может быть использован для приближенного определения частоты собственных колебаний любого сооружения, целесообразно выполнить частотный анализ с другой точки зрения, впервые рассмотренной Релеем. В основе метода Релея лежит принцип сохранения энергии — энергия свободно колеблющейся системы остается постоянной, если в ней не развиваются диссипативные силы. Рассмотрим свободные колебания недемпфированной системы, показанной на рис. 8.1, а. При соответствующем выборе начала отсчета времени перемещение массы (рис. 8.1, б)

выражается $v = v_0 \sin \omega t$ и скорость (рис. 8.1, в) $\dot{v} = v_0 \omega \cos \omega t$. Потенциальная энергия системы полностью определяется энергией упругих деформаций пружины $V = 1/2 k v^2 = 1/2 k v_0^2 \sin^2 \omega t$, а кинетическая энергия массы $T = 1/2 m \dot{v}^2 = 1/2 m v_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t$. Принимая время $t = T/4 = \pi/2 \omega$ [см. рис. 8.1 или выражения (8.3)], получаем, что кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия достигает максимальной величины $V_{\max} = 1/2 k v_0^2$. Аналогично для $t = T/2 = \pi/\omega$ потенциальная энергия равна нулю, а кинетическая энергия достигает максимума $T_{\max} = 1/2 m v_0^2 \omega^2$. Следовательно, если полная энергия колебательной системы остается постоянной (что справедливо для свободных колебаний без затухания), то максимальное значение кинетической энергии должно быть равно максимальному значению потенциальной энергии $V_{\max} = T_{\max}$, т. е. $1/2 k v_0^2 = 1/2 m v_0^2 \omega^2$, откуда $\omega^2 = k/m$. Это выражение, бесспорно, совпадает с ранее полученной частотой собственных колебаний, однако теперь оно выведено с применением метода Релея из условия равенства потенциальной и кинетической энергии.

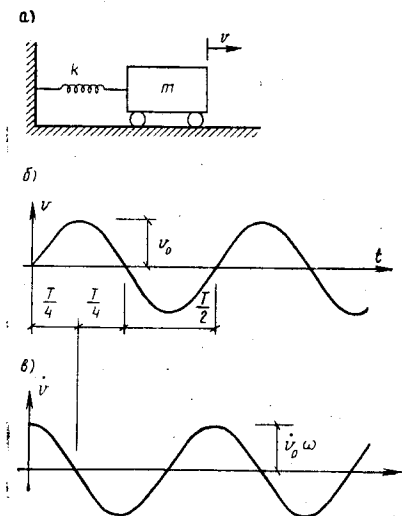


Рис. 8.1. Свободные колебания системы с одной степенью свободы без учета затухания

а — система с одной степенью свободы; б — перемещение; в — скорость

выражается

$$v = v_0 \sin \omega t \quad (8.2a)$$

и скорость (рис. 8.1, в)

$$\dot{v} = v_0 \omega \cos \omega t. \quad (8.2b)$$

Потенциальная энергия системы полностью определяется энергией упругих деформаций пружины

$$V = 1/2 k v^2 = 1/2 k v_0^2 \sin^2 \omega t, \quad (8.3a)$$

а кинетическая энергия массы

$$T = 1/2 m \dot{v}^2 = 1/2 m v_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t. \quad (8.3b)$$

Принимая время $t = T/4 = \pi/2 \omega$ [см. рис. 8.1 или выражения (8.3)], получаем, что кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия достигает максимальной величины

$$V_{\max} = 1/2 k v_0^2. \quad (8.4a)$$

Аналогично для $t = T/2 = \pi/\omega$ потенциальная энергия равна нулю, а кинетическая энергия достигает максимума

$$T_{\max} = 1/2 m v_0^2 \omega^2. \quad (8.4b)$$

Следовательно, если полная энергия колебательной системы остается постоянной (что справедливо для свободных колебаний без затухания), то максимальное значение кинетической энергии должно быть равно максимальному значению потенциальной энергии

$$V_{\max} = T_{\max}, \text{ т. е. } 1/2 k v_0^2 = 1/2 m v_0^2 \omega^2,$$

откуда $\omega^2 = k/m$. Это выражение, бесспорно, совпадает с ранее полученной частотой собственных колебаний, однако теперь оно выведено с применением метода Релея из условия равенства потенциальной и кинетической энергии.

8.2. ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Применение метода Релея для анализа рассмотренного осциллятора не дает никаких преимуществ. Его основное назначение — приближенный анализ частоты свободных колебаний систем со многими степенями свободы. Рассмотрим, например, неоднородную шарнирно опертую балку, показанную на рис. 8.2. В действительности эта балка имеет бесконечное число степеней свободы и, следовательно, может иметь бесконечное число форм собственных колебаний. Для использования метода Релея необходимо принять форму колебаний балки, которая соответствует ее основному тону. Как показано в

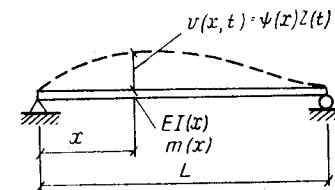


Рис. 8.2. Колебания балки с неоднородными характеристиками

гл. 1, эта форма может быть принята в виде (1.29) и с учетом гармонического изменения обобщенной координаты при свободных колебаниях

$$v(x, t) = \psi(x) Z_0 \sin \omega t, \quad (8.5)$$

где $\psi(x)$ — форма колебаний, которая представляет собой отношение перемещения любой точки x к условному перемещению или обобщенной координате $Z(t)$.

Уравнение (8.5) выражает предположение, что форма колеблющейся балки не изменяется во времени, а изменяется только амплитуда колебаний, причем по гармоническому закону (при свободных колебаниях).

Предположение о наличии формы колебаний $\psi(x)$ сводит задачу о колебаниях балки к рассмотрению системы с одной степенью свободы. Частота свободных колебаний определяется из условия равенства максимальной энергии деформаций максимуму кинетической энергии.

Потенциальная энергия изгибаемой системы равна:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (8.6)$$

Подставляя принятую форму колебаний (8.5) и рассматривая максимум амплитуды перемещений, получим:

$$V_{\max} = \frac{1}{2} Z_0^2 \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx. \quad (8.7)$$

Кинетическая энергия неоднородной балки равна:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) (\dot{v})^2 dx. \quad (8.8)$$

Если продифференцировать (8.5) по времени, то при максимальной амплитуде скорости

$$T_{\max} = \frac{1}{2} Z_0^2 \omega^2 \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx, \quad (8.9)$$

откуда из равенства выражений (8.7) и (8.9) получаем:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx}. \quad (8.10)$$

Здесь следует заметить, что числитель выражения (8.10) представляет собой обобщенную жесткость балки k^* при предполагаемой форме деформирования [см. (1.39)], а знаменатель — обобщен-

ную массу m^* [см. (1.37)]. Таким образом, метод Релея непосредственно приводит к обобщенной форме выражения (8.1), как и следовало ожидать, поскольку он использует тот же принцип обобщенной координаты для сведения системы к системе с одной степенью свободы.

8.3. ВЫБОР ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ

Точность анализа частоты собственных колебаний с помощью метода Релея полностью зависит от функции $\psi(x)$, которая, по допущению, характеризует форму собственных колебаний. В принципе для этого может быть принята любая форма, удовлетворяющая условиям опирания балки, т. е. учитывающая определенные краевые условия. Однако любая другая, кроме истинной, форма колебаний требует введения дополнительных внешних ограничений для удовлетворения условий равновесия системы. Эти лишние опоры ужесточают систему, увеличивая энергию ее деформаций и, таким образом, приводят к увеличению определяемой частоты колебаний. Следовательно, можно считать, что истинная форма колебаний дает минимальное значение частоты, определяемое методом Релея, и при поиске лучшего результата самая низкая частота, согласно этому методу, всегда обеспечивается лучшим приближением.

Пример 8.1. Для иллюстрации этого положения предположим, что балка на рис. 8.2 имеет равномерно распределенные массу \bar{m} и жесткость. В качестве первого приближения примем форму колебаний в виде параболы

$$\psi(x) = (x/L)(x/L - 1).$$

Тогда $\psi''(x) = 2/L^2$, потенциальная энергия

$$V_{\max} = \frac{1}{2} Z_0^2 EI \int_0^L \left(\frac{2}{L^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} Z_0^2 \frac{4EI}{L^3}$$

и кинетическая энергия

$$T_{\max} = \frac{1}{2} Z_0^2 \omega^2 \bar{m} \int_0^L \left[\frac{x}{L} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right]^2 dx = \frac{1}{2} Z_0^2 \omega^2 \frac{\bar{m}L}{30},$$

и, следовательно,

$$\omega^2 = \frac{V_{\max}}{(1/\omega^2) T_{\max}} = \frac{120EI}{mL^4}.$$

Если форму колебаний принять в виде синусоиды $\psi(x) = \sin(\pi x/L)$, в результате аналогичных расчетов получим:

$$\omega^2 = \frac{EI\pi^4/2L^3}{mL/2} = \pi^4 \frac{EI}{mL^4}.$$

Вторая частота существенно меньше первой (почти на 20%). Таким образом, она характеризует лучшее приближение. На самом деле этот результат является точным, так как полуволна синусоиды представляет собой истинную форму колебаний шарнирно-опертой балки. Первое приближение нельзя признать достаточно хорошим. Принятая параболическая форма коле-

баний предусматривает равномерную эпюру моментов по всей длине балки, что не соответствует условиям ее опирания. Она является возможной формой, поскольку удовлетворяет условию нулевых прогибов на опорах, но представляет собой нерациональную предпосылку.

Теперь возникает вопрос, как выбрать рационально форму изгиба для получения хороших результатов при использовании метода Релея (или эквивалентного метода обобщенных координат, описанного ранее). При выборе формы колебаний нужно руководствоваться тем, что перемещения при свободных колебаниях являются результатом приложения сил инерции и что силы инерции (т. е. произведение массы на ускорение) пропорциональны распределенной массе и амплитуде перемещений. Таким образом, правильная форма колебаний $\psi_c(x)$ — это форма изгиба от нагрузки $p_c(x)$, пропорциональной $m(x)\psi_c(x)$. Конечно, невозможно предугадать точную форму $\psi_c(x)$, но форма прогиба, вычисленная при нагрузке $\bar{p}(x) = m(x) \cdot \psi(x)$ [как показано на рис. 8.3, где $\psi(x)$ есть любая разумная аппроксимация истинной формы], обеспечит при решении достаточно высокую точность.

Вообще оценка формы колебаний по методу обобщенных координат исходя из принятой таким образом формы требует большего объема вычислений, чем это нужно в приближенном анализе. Метод Релея при гораздо меньшем объеме вычислений дает достаточно хорошую точность. Одна общая предпосылка заключается в том, что инерционная нагрузка $\bar{p}(x)$ (см. рис. 8.3) — это просто вес балки, т. е. $\bar{p}(x) = m(x)g$, где $m(x)$ — распределенная масса, а g — ускорение силы тяжести. Тогда частота вычисляется исходя из формы прогиба $v_d(x)$ под действием собственного веса. В этом случае очень легко вычислить максимальную энергию деформации на основании того, что накопленная энергия должна равняться работе, которую произвела приложенная нагрузка при деформировании системы

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L \bar{p}(x) v_d(x) dx = \frac{1}{2} g Z_0 \int_0^L m(x) \psi(x) dx. \quad (8.11)$$

Кинетическая энергия по-прежнему выражается уравнением (8.7), где $\psi(x) = v_d(x)/Z_0$ — параметр формы при действии собственного веса конструкции. Таким образом, частота, определенная приравнением выражений энергии деформаций и кинетической энергии, равна:

$$\omega^2 = \frac{g}{Z_0} \frac{\int_0^L m(x) \psi(x) dx}{\int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx} = g \frac{\int_0^L m(x) v_d(x) dx}{\int_0^L m(x) [v_d(x)]^2 dx}. \quad (8.12)$$

Выражение (8.12) применяется при приближенном анализе частоты колебаний систем произвольного вида. Следует отметить, что в выражении используется амплитуда Z_0 , если форма колебаний определяется безразмерным коэффициентом $\psi(x)$. В случае использования фактических прогибов от собственного веса конструкции эта величина не учитывается.

Нагрузка $p(x)$, используемая при определении прогиба от собственного веса конструкции $v_d(x)$ в выражении (8.12), на самом деле есть нагрузка от силы тяжести только в тех случаях, когда основное движение системы происходит в вертикальном направлении. Для конструкции в виде вертикальной консоли (рис. 8.4, а), где основное колебание происходит в горизонтальном направлении, нагрузка должна прикладываться горизонтально, как это показано на рисунке. Поэтому принимается, что для системы силы тяжести действуют в горизонтальном направлении.

Для аппроксимации частоты симметричных колебаний рамы (рис. 8.4, б) можно получить рациональную форму прогиба путем приложения вертикальной нагрузки. Однако основные колебания конструкции будут происходить в горизонтальном направлении. Для получения формы $\psi(x)$ при определении частоты горизонтальных колебаний силы тяжести следует прикладывать горизонтально. Кроме того, при основном тоне колебаний двухпролетной балки (рис. 8.4, в) два пролета будут деформироваться в противоположных направлениях. Таким образом, для получения формы прогиба в этом случае силы тяжести следует прикладывать в противоположных направлениях. Более высокая частота колебаний может быть получена при форме прогиба под действием нагрузок, направленных вниз для обоих пролетов.

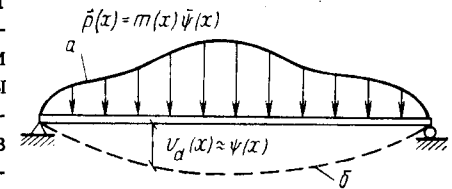


Рис. 8.3. Форма изгиба от предполагаемых инерционных нагрузок
а — приближенная инерционная нагрузка [где $\psi(x)$ — предполагаемая форма]; б — вычисленная форма изгиба

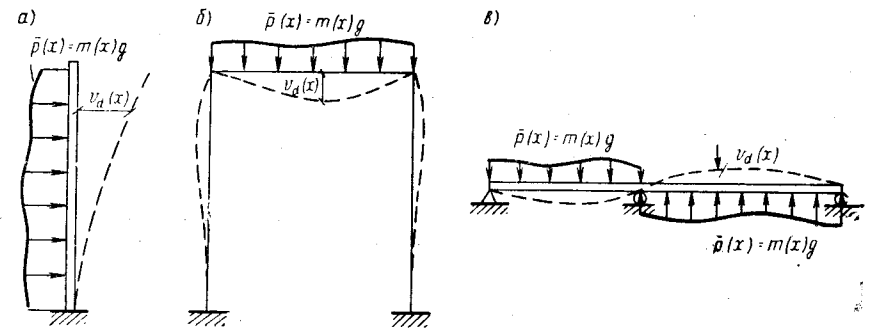
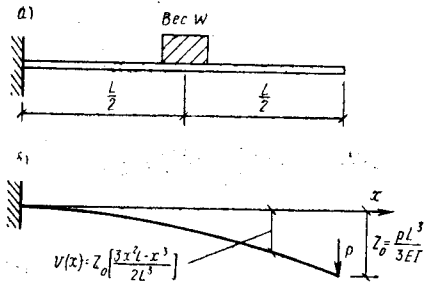


Рис. 8.4. Предполагаемые формы деформирования при постоянных нагрузках

Не следует тратить слишком много времени на определение формы прогиба с высокой степенью точности. Основное достоинство метода Релея заключается в простой и надежной оценке частоты собственных колебаний. Принятие почти любой целесообразной формы колебаний приводит к разумным результатам.

Пример 8.2. Применение метода Релея для вычисления частоты колебаний реальной системы будет показано при расчете однородной консольной балки, к которой приложен груз в середине пролета (см. рис. 8.5). Для данного расчета принята такая форма колебаний, которая вызывается нагрузкой, приложенной к концу консоли. Результирующая форма прогиба



$$v(x) = \frac{\rho L^3}{3EI} \frac{3x^2 L - x^3}{2L^3} \equiv Z_0 \psi(x).$$

Максимум потенциальной энергии балки в этом случае можно определить следующим выражением:

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \rho Z_0 = \frac{1}{2} \frac{3EI}{L^3} Z_0^2,$$

где Z_0 — прогиб конца консоли под нагрузкой.

Рис. 8.5. Определение частоты собственных колебаний балки методом Релея:

а — однородная балка с жесткостью EI и массой l м m ; б — предполагаемая форма изгиба

Максимум кинетической энергии балки можно определить в виде двух слагаемых: для балки и массы приложенной к ней нагрузки. Балка

$$T_{\max}^B = \frac{\omega^2}{2} \int_0^L \bar{m} v^2 dx = \frac{\bar{m}}{2} \omega^2 Z_0^2 \int_0^L [\psi(x)]^2 dx = \frac{33}{140} \frac{\bar{m} L}{2} \omega^2 Z_0^2.$$

Масса

$$T_{\max}^W = \frac{W}{2g} \omega^2 \left[v \left(x = \frac{L}{2} \right) \right]^2 = \frac{W}{2g} \omega^2 (5/16 Z_0)^2 = \frac{25}{256} \frac{W}{2g} \omega^2 Z_0^2,$$

откуда общая кинетическая энергия

$$T_{\max} = \left(\frac{33}{140} + \frac{25}{256} \frac{W}{mLg} \right) \frac{\bar{m} L}{2} \omega^2 Z_0^2,$$

и, приравняв выражения максимальной кинетической и потенциальной энергий, получаем выражение для частоты

$$\omega^2 = \frac{3}{\frac{33}{140} + \frac{25}{256} \frac{W}{mLg}} \frac{EI}{\bar{m} L^4}.$$

8.4. Усовершенствованный метод Релея

Идея применения в методе Релея формы прогиба от сил инерции, как рассмотрено выше, использовалась систематически для улучшения методики расчета. Этот стандартный прием включает произвольный выбор формы изгиба, которая удовлетворяет геометрическим граничным условиям системы. В рамках настоящего анализа эта первоначальная форма обозначается с верхним нулевым индексом

$$v^{(0)}(x, t) = \psi^{(0)}(x) Z_0^{(0)} \sin \omega t. \quad (8.13)$$

Максимальные величины потенциальной и кинетической энергии при этой форме деформирования:

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left(\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{Z_0^{(0)2}}{2} \int_0^L EI(x) (\psi''^{(0)})^2 dx. \quad (8.14)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) (\dot{v}^{(0)})^2 dx = \frac{Z_0^{(0)2}}{2} \omega^2 \int_0^L m(x) (\psi^{(0)})^2 dx. \quad (8.15)$$

Метод R_{00} . Стандартное выражение для частоты по методу Релея, который назван методом R_{00} , равно:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L EI(x) (\psi''^{(0)})^2 dx}{\int_0^L m(x) (\psi^{(0)})^2 dx}. \quad (8.16)$$

Однако лучшее приближение для частоты может быть получено при вычислении потенциальной работы сил инерции, связанных с принятой формой прогибов. Распределенные силы инерции при максимальной амплитуде перемещений равны:

$$p^{(0)}(x) = \omega^2 m(x) v^{(0)} = Z_0^{(0)} \omega^2 m(x) \psi^{(0)}. \quad (8.17)$$

Прогиб, вызываемый этой нагрузкой, записывается в виде

$$v^{(1)} = \omega^2 \frac{v^{(0)}}{\omega^2} = \omega^2 \psi^{(1)} \frac{Z_0^{(1)}}{\omega^2} \equiv \omega^2 \psi^{(1)} \bar{Z}_0^{(1)}, \quad (8.18)$$

где ω^2 — неизвестная частота, которую можно рассматривать как коэффициент пропорциональности в выражениях (8.17) и (8.18).

В связи с тем что величина коэффициента неизвестна, он не включается в выражения. Потенциальная энергия деформаций при этой нагрузке равна:

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L p^{(0)} v^{(1)} dx = \frac{Z_0^{(0)} \bar{Z}_0^{(1)}}{2} \omega^4 \int_0^L m(x) \psi^{(0)} \psi^{(1)} dx. \quad (8.19)$$

Метод R_{01} . Равенство этого выражения для потенциальной энергии выражению кинетической энергии при первоначально принятой форме [выражение (8.15)] позволяет получить соотношение для улучшения частоты по методу Релея, который назван здесь *методом R_{01}* ;

$$\omega^2 = \frac{Z_0^{(0)}}{\bar{Z}_0^{(1)}} \frac{\int_0^L m(x) (\psi^{(0)})^2 dx}{\int_0^L m(x) \psi^{(0)} \psi^{(1)} dx} \quad (8.20)$$

Это выражение часто рекомендуется использовать до расчета по формуле (8.16), поскольку оно исключает операцию дифференцирования, необходимую для стандартной формулы. Как правило, кривизны $\psi''(x)$, связанные с предполагаемой формой изгиба, приводят к менее точным результатам, чем функция прогиба $\psi(x)$, поэтому расчет по формуле (8.20), не содержащей производных, дает лучшую точность.

Однако еще лучшее приближение может быть получено при определении кинетической энергии не по начальной форме $v^{(0)}$, а по вычисленной форме $v^{(1)}$, хотя при этом объем вычислений несколько возрастает.

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) (\dot{v}^{(1)})^2 dx = 1/2 \omega^6 (\bar{Z}^{(1)})^2 \int_0^L m(x) (\psi^{(1)})^2 dx \quad (8.21)$$

Метод R_{11} . Равенство этого выражения выражению (8.19) для потенциальной энергии приводит к дальнейшему улучшению результата (этот метод назван здесь *методом R_{11}*).

$$\omega^2 = \frac{Z_0^{(0)}}{\bar{Z}_0^{(1)}} \frac{\int_0^L m(x) \psi^{(0)} \psi^{(1)} dx}{\int_0^L m(x) (\psi^{(1)})^2 dx} \quad (8.22)$$

Дальнейшее улучшение может быть достигнуто на следующем этапе вычислительного процесса при использовании инерционных нагрузок, вызываемых $\psi^{(1)}$, для определения новой формы $\psi^{(2)}$. Как будет показано, он быстро сходится к точной форме колебаний, если проведен для достаточного числа циклов, и поэтому приводит к точному значению частоты. Однако при практическом использовании метода Релея нет необходимости улучшать результат, полученный с помощью (8.22). Амплитуды обобщенных координат $Z_0^{(0)}$ и $\bar{Z}_0^{(1)}$ в выражениях (8.20) и (8.22) произвольны и могут быть приняты равными единице, если функции формы $\psi^{(0)}$ и $\psi^{(1)}$ выбраны соответствующим образом. Тем не менее целесообразно оставить обобщенные координаты в этих выражениях, чтобы подчеркнуть, что относительные амплитуды $v^{(0)}$ и $v^{(1)}$ являются коэффициентами при определении частоты.

Пример 8.3. Два улучшенных варианта метода Релея будут рассмотрены и сопоставлены со стандартным методом при вычислении частот колебаний трехэтажной рамы (рис. 8.6). Массы рамы приняты сосредоточенными в уровнях ригелей, а колонны предполагаются невесомыми. Кроме того, ригели являются бесконечно жесткими, поэтому колонны каждого этажа деформируются как простые пружины с коэффициентами жесткости, указанными на рисунке.

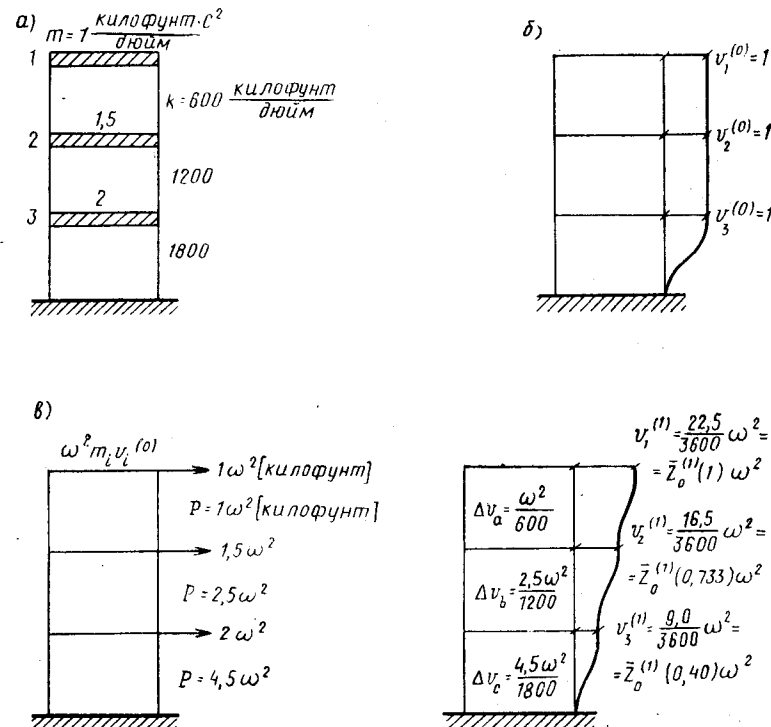


Рис. 8.6. Определение частот собственных колебаний рамы методом Релея а — значения массы и жесткости; б — начальная принятая форма; в — прогибы при первоначальных инерционных силах $\omega^2 m_i v_i^{(0)}$

Стандартный метод R_{00} . Для подтверждения эффективности улучшенных методов для начальной формы колебаний рамы принято заведомо плохое приближение. Эта форма представляет собой равные смещения всех трех этажей (рис. 8.6, б), откуда

$$v_1^{(0)} = v_2^{(0)} = v_3^{(0)} = 1 = Z_0^{(0)} \psi_i^{(0)},$$

где

$$\psi_i^{(0)} = Z_0^{(0)} = 1.$$

Для этой формы максимум кинетической энергии равен:

$$T_{\max}^{(0)} = 1/2 \sum m_i (v^{(0)})^2 = 1/2 \omega^2 Z_0^{(0)2} \sum m_i (\psi_i^{(0)})^2 = 1/2 \omega^2 \cdot 4,5.$$

Максимальная потенциальная энергия зависит от относительных перемещений этажей и равна:

$$V_{\text{макс}}^{(0)} = 1/2 \sum k_i (\Delta v_i^{(0)})^2 = 1/2 Z_0^{(0)2} \sum k_i (\Delta \psi_i^{(0)})^2 = 1/2 \cdot 1800.$$

Отсюда после приравнивания потенциальной и кинетической энергий получаем частоту

$$\omega^2 = \frac{1800}{4,5} = 400; \quad \omega = 20 \text{ рад/с.}$$

Улучшенный метод R_{01} . Предположение о том, что работа сооружения характеризуется абсолютной жесткостью колонн выше первого этажа для данной рамы, естественно, не оправдано. И поэтому получены явно завышенные значения частоты колебаний. Используя инерционные силы при этих первоначальных прогибах для вычисления улучшенной формы, в соответствии с методом R_{01} получим значительно лучший результат.

Инерционные силы при первоначальной форме и вызываемые прогибы показаны на рис. 8.6, в. Эти прогибы можно легко вычислить, поскольку деформация каждого этажа Δv_i определяется поперечной силой, поделенной на жесткость этажа. Максимальная потенциальная энергия при этой новой форме $v_i^{(1)}$ равна:

$$V_{\text{макс}}^{(1)} = 1/2 \sum p_i^{(0)} v_i^{(1)} = \frac{\omega^4}{2} \bar{Z}_0^{(1)} \sum m_i \psi_i^{(0)} \psi_i^{(1)} = \frac{\omega^4}{2} \bar{Z}_0^{(1)} \cdot 2,9.$$

Приравнивая ее к ранее найденной кинетической энергии, получаем частоту колебаний

$$\omega^2 = \frac{1}{\bar{Z}_0^{(1)}} \frac{4,5}{2,9} = \frac{1}{22,5/3600} \frac{4,5}{2,9} = 248, \quad \omega = 15,73 \text{ рад/с.}$$

Очевидно, что эта частота намного меньше и характеризует существенное улучшение результата, полученного стандартным методом R_{00} .

Улучшенный метод R_{11} . Более точные результаты могут быть получены при использовании для вычисления потенциальной и кинетической энергии формы $\psi_i^{(1)}$. Тогда максимальная кинетическая энергия

$$T_{\text{макс}}^{(1)} = \frac{\omega^2}{2} (\bar{Z}_0^{(1)})^2 \sum m_i (\psi_i^{(1)})^2 = \frac{\omega^6}{2} \left(\frac{22,5}{3600} \right)^2 2,124$$

и частота колебаний

$$\omega^2 = \frac{1}{\bar{Z}_0^{(1)}} \frac{2,9}{2,124} = \frac{3600}{22,5} \frac{2,9}{2,124} = 218, \quad \omega = 14,76 \text{ рад/с.}$$

Это значение является очень близким к точной частоте первой формы колебаний сооружения $\omega_1 = 14,5$ рад/с, о которой говорится в гл. 10.

Интересно отметить, что метод R_{11} в данном случае дает тот же самый результат, что и выражение (8.12), в котором прогибы определены при горизонтальных нагрузках, соответствующих ускорению силы тяжести. Это объясняется тем, что инерционные силы, связанные с равными перемещениями этажей, эквивалентны горизонтальным нагрузкам при ускорении силы тяжести. Однако если бы в качестве первоначальной формы было принято более разумное приближение (а не равные прогибы этажей), то улучшенный метод R_{11} дал бы более точный результат, чем выражение (8.12).

ЧАСТЬ II

СИСТЕМЫ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

ГЛАВА 9

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

9.1. ВЫБОР ЧИСЛА СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В части I было показано, что любое сооружение можно представить системой с одной степенью свободы, динамическая реакция которой затем определяется решением одного дифференциального уравнения движения. Если физические характеристики системы таковы, что ее можно описать с помощью только одной компоненты движения, а другие колебания невозможны, тогда она действительно является системой с одной степенью свободы и решение уравнения точно характеризует поведение объекта при динамическом воздействии. Если же сооружение на самом деле имеет более чем одну форму перемещений и оно сведено в математической постановке к системе с одной степенью свободы заданием формы деформирования, решение такого уравнения движения будет только аппроксимацией истинного процесса реакции сооружения при динамическом воздействии.

Достоверность результатов, полученных при представлении системы в виде одномассового осциллятора, зависит от многих факторов и прежде всего от пространственного распределения и изменения во времени нагрузки, жесткостных и инерционных характеристик системы. Если физические свойства системы позволяют ей колебаться по предполагаемой форме и если схема нагрузки такова, что вызывает преимущественные колебания по этой форме, такое решение задачи для системы с одной степенью свободы дает достаточно хорошее приближение. С другой стороны, истинный характер работы сооружения может быть совсем иным, чем определяемый расчетным путем. Один из основных недостатков приближенных моделей в виде систем с одной степенью свободы — трудность оценки надежности полученных с их помощью результатов.

В общем случае динамическая реакция сооружения не может быть адекватно описана одномассовой моделью. Обычно реакция характеризуется изменением во времени формы и амплитуды колебаний. Такой процесс может быть описан только с помощью системы с более чем одной степенью свободы. Как отмечалось во введении, степени свободы в системе с дискретными параметрами могут быть приняты как амплитуды перемещений определенных точек системы.

В качестве их можно также принять обобщенные координаты, представляющие собой амплитуды выбранной системы параметров

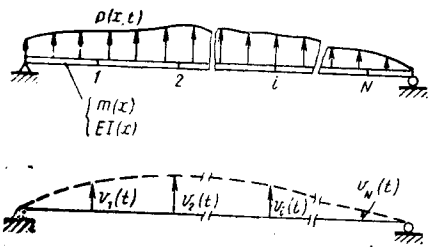


Рис. 9.1. Дискретизация обобщенной модели сооружения типа балки

перемещений. В данной главе принят первый подход. Он включает в себя как метод конечных элементов, так и модели с сосредоточенными массами. Метод обобщенных координат будет рассмотрен в конце ч. II (разд. 15.2).

В связи с этим уравнения колебаний достаточно общей системы со многими степенями свободы удобно рассмотреть на примере простой балки (рис. 9.1).

Рассматриваемый метод применим в равной мере к любому сооружению, но наглядность физических параметров, включая определение всех нагрузок на систему, упрощается при рассмотрении такой модели.

Предполагается, что колебания этой системы определяются перемещениями системы дискретных точек балки $v_1(t)$, $v_2(t)$, ..., $v_i(t)$, ..., $v_N(t)$. В принципе такие точки могут быть для сооружения выбраны произвольно. На практике они связаны с определенными параметрами физических величин, которые должны быть подобраны по своему значению и распределены так, чтобы достаточно хорошо определять форму колебаний. Число степеней свободы (компонентов перемещений), необходимых для расчета, задается проектировщиком. Большее число степеней свободы дает лучшую аппроксимацию истинного характера динамической реакции. Однако во многих случаях отличные результаты могут быть получены при рассмотрении двух или трех степеней свободы. Для балки (рис. 9.1) с каждой узловой точкой может быть связана только одна компонента перемещений. Следует отметить, что, как правило, каждой точке может быть предписано несколько составляющих движения. Например, поворот $\partial v/\partial x$ и продольные перемещения можно рассматривать в качестве дополнительных степеней свободы каждой узловой точки.

9.2. УСЛОВИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Уравнения движения системы на рис. 9.1 могут быть записаны из условия равновесия сил, связанных с каждой формой ее колебаний. В общем случае силы четырех типов могут быть приложены к каждой точке: внешняя нагрузка $p_i(t)$ и силы, появляющиеся в результате движения: сила инерции f_{Ii} , сила затухания f_{Di} и сила упругости f_{Si} . Для каждой из степеней свободы уравнения динамического равновесия записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} &= p_1(t); \\ f_{I2} + f_{D2} + f_{S2} &= p_2(t); \\ f_{I3} + f_{D3} + f_{S3} &= p_3(t); \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

или в векторно-матричной форме:

$$f_I + f_D + f_S = p(t), \quad (9.2)$$

которая представляет собой эквивалент уравнения (1.1) для системы со многими степенями свободы.

Каждую из сил сопротивления более удобно выразить через соответствующую систему коэффициентов. Рассмотрим в качестве примера силу упругости, развиваемую в точке 1. В общем случае она зависит от компонент перемещений всех других точек системы

$$f_{S1} = k_{11} v_1 + k_{12} v_2 + k_{13} v_3 + \dots + k_{1N} v_N. \quad (9.3a)$$

Аналогично этому сила упругости для степени свободы v_2

$$f_{S2} = k_{21} v_1 + k_{22} v_2 + k_{23} v_3 + \dots + k_{2N} v_N, \quad (9.36)$$

и в общем случае

$$f_{Si} = k_{i1} v_1 + k_{i2} v_2 + k_{i3} v_3 + \dots + k_{iN} v_N. \quad (9.3b)$$

В этих выражениях предполагалось, что сооружение работает упруго и поэтому справедлив принцип суперпозиции. Коэффициенты k_{ij} называют *коэффициентами влияния жесткостей* и определяют следующим образом:

k_{ij} — сила, соответствующая координате i , при единичном перемещении координаты j . (9.4)

В матричной форме полная система соотношений упругих сил записывается в виде

$$\begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \dots \\ f_{Si} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_i \\ \dots \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

или в символической форме

$$f_S = kv. \quad (9.6)$$

Здесь матрица коэффициентов k называется *матрицей жесткостей* сооружения (для выбранной системы координат перемещений) и v -вектором перемещений, характеризующим форму деформаций сооружения.

Если предполагается, что затухание зависит от скорости, т. е. принимается вязкое затухание, то силы затухания, соответствующие выбранным степеням свободы, могут быть записаны с помощью коэффициентов влияния затухания. По аналогии с (9.5) полная сис-

тема сил затухания имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_{D1} \\ \dot{f}_{D2} \\ \dots \\ \dot{f}_{Di} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2i} & \dots & c_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dots \\ \dot{v}_i \\ \dots \end{bmatrix}, \quad (9.7)$$

где \dot{v}_i — изменение во времени i -го перемещения, т. е. скорость движения; c_{ij} — коэффициенты влияния затухания. Определение этих коэффициентов соответствует определению (9.4); c_{ij} — сила, соответствующая координате i при единичной скорости колебаний координаты j .

В символической форме система (9.7) имеет вид

$$\dot{f}_D = c\dot{v}, \quad (9.9)$$

где матрица коэффициентов c — матрица затухания сооружения (для выбранных степеней свободы) и \dot{v} — вектор скорости.

Инерционные силы также можно представить системой коэффициентов влияния, называемых коэффициентами масс. Они характеризуют соотношение между ускорениями и результирующими инерционными силами. По аналогии с (9.5) инерционные силы

$$\begin{bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \dots \\ f_{Ii} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1i} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2i} & \dots & m_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{i1} & m_{i2} & m_{i3} & \dots & m_{ii} & \dots & m_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \dots \\ \ddot{v}_i \\ \dots \end{bmatrix}, \quad (9.10)$$

где \ddot{v}_i — ускорение i -той компоненты перемещений; m_{ij} — коэффициенты влияния масс, определяемые следующим образом: m_{ij} — сила, соответствующая координате i при единичном ускорении координаты j .

Система (9.10) в символической форме принимает вид

$$f_I = m\ddot{v}, \quad (9.12)$$

где матрица коэффициентов m — матрица масс сооружения и \ddot{v} — вектор ускорений, определенных для выбранной системы координат.

Подставляя условия (9.6), (9.9) и (9.12) в уравнение (9.2), получаем полное условие динамического равновесия системы, учитывающее все степени свободы

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t). \quad (9.13)$$

Для системы со многими степенями свободы это уравнение эквивалентно (9.2). Каждый член в уравнении для системы с одной степенью свободы представлен в (9.13) матрицей, порядок которой

соответствует числу степеней свободы, используемых для описания перемещений сооружения. Таким образом, уравнение (9.13) представляет собой N уравнений движения, которые определяют реакцию системы со многими степенями свободы.

9.3. ВЛИЯНИЕ ОСЕВЫХ НАГРУЗОК

При рассмотрении системы с одной степенью свободы отмечалось, что осевые нагрузки или любая другая сила, которая может вызвать потерю продольной устойчивости сооружения, оказывает большое влияние на жесткость системы. Такое же явление наблюдается в системах со многими степенями свободы. Составляющая силы, направленная параллельно первоначальной оси элемента, вызывает дополнительные составляющие сил, которые действуют в направлении узловых перемещений. Обозначим их f_G . Если эти силы учесть в уравнении динамического равновесия, то (9.2) принимает вид

$$f_I + f_D + f_S - f_G = p(t), \quad (9.14)$$

где знак «минус» характеризует то влияние, которое силы f_G оказывают на прогибы системы (они вызывают увеличение прогибов, а не противодействуют им).

Указанные силы от осевых нагрузок зависят от перемещений сооружения и могут быть выражены с помощью так называемых коэффициентов влияния жесткостей, определяемых геометрией системы:

$$\begin{bmatrix} f_{G1} \\ f_{G2} \\ \dots \\ f_{Gi} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{G11} & k_{G12} & k_{G13} & \dots & k_{G1i} & \dots & k_{G1N} \\ k_{G21} & k_{G22} & k_{G23} & \dots & k_{G2i} & \dots & k_{G2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{Gi1} & k_{Gi2} & k_{Gi3} & \dots & k_{Gii} & \dots & k_{GiN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_i \\ \dots \end{bmatrix}, \quad (9.15)$$

где коэффициенты влияния k_{Gij} определяются следующим образом:

k_{Gij} — сила, соответствующая координате i при единичном перемещении координаты j , проявляющаяся в связи с составляющими осевых усилий (9.16).

В символической форме (9.15) принимает вид

$$f_G = k_G v, \quad (9.17)$$

где k_G — матрица жесткости, определяемая геометрическими параметрами системы.

Если это выражение ввести в уравнение динамического равновесия, то (9.13) преобразуется к виду

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv - k_G v = p(t). \quad (9.18)$$

Объединяя обе компоненты сил упругости, получим:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + \bar{k}v = p(t), \quad (9.19)$$

где

$$\bar{k} = k - k_0 \quad (9.20)$$

называется приведенной матрицей жесткости системы, которая характеризует как силы упругости, так и геометрические параметры. Динамические характеристики системы полностью определяются четырьмя матрицами коэффициентов уравнения (9.18), между тем динамическая нагрузка полностью определяется вектором сил. Методы получения указанных матриц физических характеристик и вектора сил, определяемого внешними приложенными силами, подробно рассматриваются в следующей главе. Вектор эффективных нагрузок при кинематическом возбуждении опор сооружения будет рассмотрен в гл. 16 при анализе сейсмической реакции сооружений.

ГЛАВА 10

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТРИЦ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

10.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГОСТИ

10.1.1. Податливость. Перед рассмотрением матрицы упругих жесткостей в форме (9.5) полезно найти обратное соотношение, характеризующее податливость конструкций.

Определение коэффициента влияния податливости \tilde{f}_{ij} следующие:

\tilde{f}_{ij} — прогиб по координате i при единичной нагрузке, приложенной в направлении координаты j . (10.1).

Для простой балки, показанной на рис. 10.1, выясним физический смысл некоторых коэффициентов податливости, связанных со степенями свободы при перемещениях в вертикальном направлении. Можно также рассмотреть степени свободы относительно горизонтальных перемещений и поворота. В обоих случаях необходимо для определения коэффициентов податливости ввести соответствующие единичные горизонтальные силы и изгибающие моменты. При рассмотрении данной задачи удобно ограничиться вертикальными перемещениями.

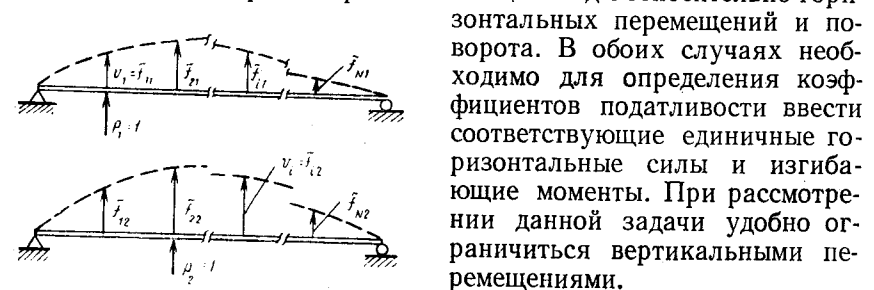


Рис. 10.1. Определение коэффициентов матрицы податливости

Определение коэффициентов податливости (единичного пере-

мещения) для любой заданной системы является стандартной задачей статического расчета, и любой метод может быть использован для нахождения перемещений от приложенных единичных сил. После того как все коэффициенты определены, их используют для вычисления вектора перемещений, являющихся результатом любой комбинации приложенных сил. Например, перемещение точки I при любом сочетании внешних нагрузок имеет вид

$$v_1 = \tilde{f}_{11} p_1 + \tilde{f}_{12} p_2 + \tilde{f}_{13} p_3 + \dots + \tilde{f}_{1N} p_N. \quad (10.2)$$

Поскольку аналогичные выражения можно записать для любой компоненты перемещения, полная система записывается в виде

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_i \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{11} & \tilde{f}_{12} & \tilde{f}_{13} & \dots & \tilde{f}_{1i} & \dots & \tilde{f}_{1N} \\ \tilde{f}_{21} & \tilde{f}_{22} & \tilde{f}_{23} & \dots & \tilde{f}_{2i} & \dots & \tilde{f}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{f}_{i1} & \tilde{f}_{i2} & \tilde{f}_{i3} & \dots & \tilde{f}_{ii} & \dots & \tilde{f}_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_i \\ \dots \end{bmatrix}, \quad (10.3)$$

или в символической форме

$$v = \tilde{f} p, \quad (10.4)$$

где матрица коэффициентов \tilde{f} называется *матрицей податливости* сооружения.

В уравнении (10.4) прогибы выражены через вектор внешних сил p , который считается положительным, если имеет то же направление, что и перемещения.

Прогибы можно также записать через упругие силы f_s , которые *препятствуют* прогибам и остаются положительными, если направлены противоположно положительным перемещениям. Очевидно, что из условий статического равновесия $f_s = p$ и соотношение (10.4) принимает вид

$$v = \tilde{f} f_s. \quad (10.5)$$

10.1.2. Жесткость. Физический смысл коэффициентов жесткости, определенных в (9.4), проиллюстрирован на рис. 10.2. Они характеризуют усилия в конструкции, которые возникают при единичном перемещении вдоль одной из степеней свободы, между тем другие перемещения узловых точек стеснены.

Следует отметить, что коэффициенты жесткости на рис. 10.2 численно равны приложенным силам, необходимым для достижения принятого деформированного состояния. Они положительны, если знак

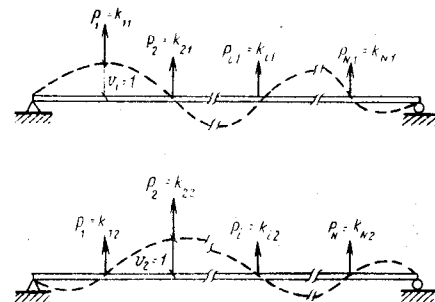


Рис. 10.2. Определение коэффициентов матрицы жесткости

приложенных сил совпадает с положительным направлением перемещений, и отрицательны в обратном случае.

10.1.3. Основные принципы расчета конструкций. Энергию деформаций, накопленную любой конструкцией, удобно выразить либо через матрицу податливости, либо через матрицу жесткости. Энергия деформаций U равна работе, производимой при деформировании системы

$$U = 1/2 \sum_{i=1}^N p_i v_i = 1/2 \mathbf{p}^T \mathbf{v}, \quad (10.6)$$

где \mathbf{p}^T — транспонированная матрица \mathbf{p} .

Подставляя в это выражение (10.4), получим:

$$U = 1/2 \mathbf{p}^T \tilde{\mathbf{f}} \mathbf{p}. \quad (10.7)$$

С другой стороны, транспонируя (10.6) и подставляя результат в (9.6), можно получить второе выражение для энергии деформаций (следует помнить, что $\mathbf{p} = \mathbf{f}_s$):

$$U = 1/2 \mathbf{v}^T \mathbf{k} \mathbf{v}. \quad (10.8)$$

Наконец, так как энергия деформаций, накопленная сооружением, в состоянии устойчивого равновесия всегда положительна, очевидно

$$\mathbf{v}^T \mathbf{k} \mathbf{v} > 0 \text{ и } \mathbf{p}^T \tilde{\mathbf{f}} \mathbf{p} > 0. \quad (10.9)$$

Матрицы, удовлетворяющие этому условию, называют *положительно определенными*. Здесь \mathbf{v} или \mathbf{p} — произвольные ненулевые векторы. Положительно определенные матрицы и, следовательно, матрицы податливостей и жесткостей — неособенные и могут быть обращены.

Обращая матрицу жесткостей и умножая на нее слева обе части уравнения (9.6), получим:

$$\mathbf{k}^{-1} \mathbf{f}_S = \mathbf{v}.$$

Сравнение результата с уравнением (10.5) показывает, что матрица податливости равна обратной матрице жесткостей

$$\mathbf{k}^{-1} = \tilde{\mathbf{f}}. \quad (10.10)$$

На практике вычисление коэффициентов жесткости непосредственно на основании определения (10.2) может представить сложную вычислительную задачу. Во многих случаях наиболее удобным методом получения матрицы жесткостей является определение единичных перемещений и затем обращение их матрицы.

Правило Бетти. Из сравнения работы двух систем сил, прикладываемых к конструкции в обратной последовательности, можно получить правило, очень важное в динамике сооружений. Рассмотрим в качестве примера (рис. 10.3) две различные схемы нагружения и

вызываемые ими перемещения. Если сначала приложены силы a , а затем силы b , то производимая ими работа равна:

Случай 1.

$$\text{Силы } a: W_{aa} = 1/2 \sum p_{ia} v_{ia} = 1/2 \mathbf{p}_a^T \mathbf{v}_a.$$

$$\text{Силы } b: W_{bb} + W_{ab} = 1/2 \mathbf{p}_b^T \mathbf{v}_b + \mathbf{p}_a^T \mathbf{v}_{b_0}$$

$$\text{Общая: } W_1 = W_{aa} + W_{bb} + W_{ab} = 1/2 \mathbf{p}_a^T \mathbf{v}_a + 1/2 \mathbf{p}_b^T \mathbf{v}_b + \mathbf{p}_a^T \mathbf{v}_b. \quad (10.11)$$

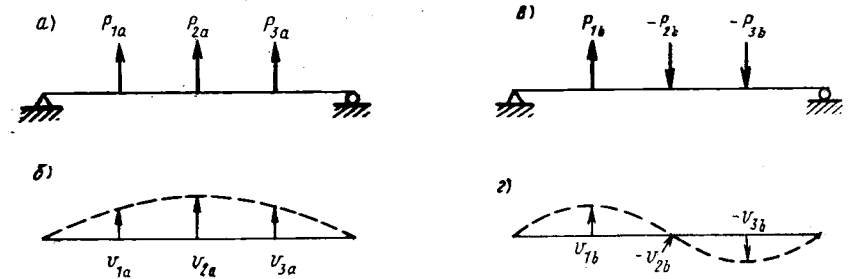


Рис. 10.3. Две независимые системы сил и результирующие прогибы
а — системы нагрузок а; б — прогибы а; а' — система сил б; б' — прогибы б

Отметим, что работа сил a при приложении сил b не умножается на $\frac{1}{2}$, так как они сохраняют постоянное значение в течение всего перемещения \mathbf{v}_b . Если нагрузки прикладываются в обратной последовательности, то работа равна:

Случай 2.

$$\text{Силы } b: W_{bb} = 1/2 \mathbf{p}_b^T \mathbf{v}_b.$$

$$\text{Силы } a: W_{aa} + W_{ba} = 1/2 \mathbf{p}_a^T \mathbf{v}_a + \mathbf{p}_b^T \mathbf{v}_a.$$

$$\text{Общая: } W_2 = W_{bb} + W_{aa} + W_{ba} = 1/2 \mathbf{p}_b^T \mathbf{v}_b + 1/2 \mathbf{p}_a^T \mathbf{v}_a + \mathbf{p}_a^T \mathbf{v}_a. \quad (10.12)$$

Но деформации конструкции не зависят от последовательности их нагружения, поэтому энергия деформаций или, что то же самое, работа внешних сил для обоих случаев будет одинаковой, т. е. $W_1 = W_2$. Сравнивая (10.11) и (10.12), можно заключить, что $W_{ab} = W_{ba}$ и, следовательно,

$$\mathbf{p}_a^T \mathbf{v}_b = \mathbf{p}_b^T \mathbf{v}_a. \quad (10.13)$$

Уравнение (10.13) выражает *правило Бетти*, которое утверждает, что работа, выполненная одной системой сил на перемещениях, вызванных другой системой сил, равна работе второй системы сил на перемещениях, вызванных первой системой.

Если уравнение (10.4) записать для указанных двух систем сил и перемещений и подставить их в (10.13), то получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_a^T \tilde{\mathbf{f}} \mathbf{p}_b &= \mathbf{p}_b^T \tilde{\mathbf{f}} \mathbf{p}_a, \\ \tilde{\mathbf{f}} &= \tilde{\mathbf{f}}^T. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Таким образом, матрица податливости (единичных перемещений) должна быть симметричной, т. е. $\bar{f}_{ij} = \bar{f}_{ji}$. Это выражение закона Максвелла о взаимности прогибов. Проводя аналогичные операции с уравнением (9.6), получаем:

$$k = k^T. \quad (10.15)$$

Следовательно, матрица жесткостей также симметричная.

10.1.4. Жесткость конечного элемента. В принципе коэффициенты податливости или жесткости, связанные с определенной системой

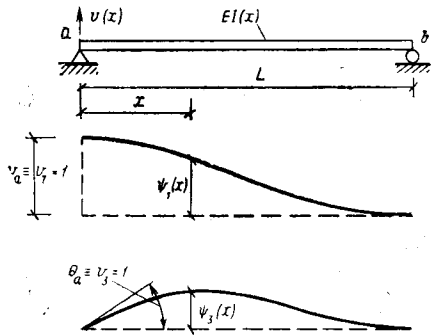


Рис. 10.4. Прогибы балки при единичных перемещениях левой опоры

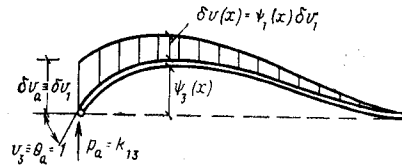


Рис. 10.5. Балка под действием реального поворота и возможного перемещения узла

рактального элемента. Рассмотрим в качестве примера часть балки с неравномерно распределенной жесткостью (рис. 10.4). Две узловые точки, в которых элементы рассматриваемого типа могут сопрягаться в систему, расположены по концам. Если учитываются только поперечные перемещения в плоскости рисунка, то элемент имеет по две степени свободы для каждого узла — вертикальное перемещение и поворот. Формы деформаций при единичных перемещениях левой опоры при ограничениях на три другие узловые перемещения показаны на рис. 10.4. Эти функции перемещений могут иметь произвольную форму, которая удовлетворяет узловым и внутренним условиям непрерывности, однако обычно они принимаются как для однородной балки при узловых перемещениях. За-

перемещений узловых точек, могут быть найдены на основании их определений. В действительности метод конечного элемента (МКЭ), описанный во введении, во многих случаях представляет собой более эффективный прием вычисления упругих характеристик. Согласно этому методу, сооружение разбивается на систему конечных элементов, которые связаны между собой только в конечном числе узловых точек. Характеристика всего сооружения затем определяется вычислением характеристик отдельных конечных элементов и их последующим объединением.

Задача нахождения жесткостных характеристик любого сооружения, таким образом, сводится в принципе к определению жесткости ха-

пишем эти функции в виде полиномов Эрмита:

$$\psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3; \quad (10.16a)$$

$$\psi_3(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2. \quad (10.16б)$$

Эквивалентные функции деформирования при перемещениях, приложенных к правому концу балки, имеют вид:

$$\psi_2(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3; \quad (10.16в)$$

$$\psi_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right). \quad (10.16г)$$

С учетом указанных четырех функций форма деформирования элемента может быть выражена через его узловые перемещения

$$v(x) = \psi_1(x)v_1 + \psi_2(x)v_2 + \psi_3(x)v_3 + \psi_4(x)v_4, \quad (10.17)$$

где степени свободы, показанные на рис. 10.4, равны:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix}. \quad (10.17a)$$

Отметим, что в качестве основных узловых степеней свободы приняты как перемещения, так и повороты.

Коэффициенты жесткости элемента равны силам при единичных узловых перемещениях. Эти силы для каждой компоненты узловых перемещений могут быть получены с использованием принципа возможных перемещений (см. разд. 1.5). Рассмотрим в качестве примера коэффициент жесткости k_{13} для балки на рис. 10.4, т. е. величину вертикальной силы в точке a при единичном повороте этой же точки.

Величина силы может быть определена введением возможного вертикального перемещения узла a (см. рис. 10.5) при единичном повороте опоры и вычислением работы инерционных сил $W_E = W_I$. В рассматриваемом случае работа внешних сил производится только вертикальными силами в точке a , поскольку возможные перемещения всех других компонент равны нулю. Таким образом,

$$W_E = \delta v_a p_a = \delta v_1 k_{13}. \quad (10.18)$$

Работа внутренних сил производится внутренними моментами, вызванными поворотом $\theta_a = 1$, на возможных значениях кривизны, которые при пренебрежении влиянием сдвига равны:

$$\partial^2/\partial x^2 [\delta v(x)] = \psi_1''(x) \delta v_1.$$

Поскольку моменты внутренних сил при $\theta_a = 1$

$$M(x) = EI(x) \psi_3''(x),$$

$$Wl = \delta v_1 \int_0^L EI(x) \psi_1''(x) \psi_3''(x) dx. \quad (10.19)$$

Приравнявая выражение для работы (10.18) к (10.19), получаем коэффициент жесткости

$$k_{13} = \int_0^L EI(x) \psi_1''(x) \psi_3''(x) dx. \quad (10.20)$$

По аналогии любой коэффициент жесткости при изгибе балки может быть записан в форме

$$k_{ij} = \int_0^L EI(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx. \quad (10.21)$$

Из этого выражения следует симметричность матрицы жесткости, т. е. $k_{ij} = k_{ji}$. Следует отметить, что это эквивалентно уравнению (1.39) при $i = j$.

Для элемента однородной балки матрица жесткости, получаемая с помощью (10.21), когда в качестве фундаментальных функций используются выражения (10.16), имеет вид

$$\begin{bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ f_{s3} \\ f_{s4} \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 3L & 3L \\ -6 & 6 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 2L^2 & L^2 \\ 3L & -3L & L^2 & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, \quad (10.22)$$

где v — узловые перемещения согласно (10.17 а); f_s — соответствующий вектор узловых сил.

Указанные коэффициенты жесткости выражают точные значения для однородной балки без учета напряжений сдвига, поскольку в качестве функций форм деформирования приняты их истинные зависимости. Если жесткость балки неоднородна, то использование этих зависимостей для определения (10.21) дает лишь приближенные значения. Однако окончательные результаты для балки в целом могут быть вполне удовлетворительными, если балка разделена на достаточное число конечных элементов.

Как уже отмечалось, когда определены коэффициенты жесткости для всех конечных элементов, жесткость всей конструкции может быть вычислена сложением этих коэффициентов в определенной последовательности. Такой метод называется *прямым методом жесткостей*. Действительно коэффициент жесткости системы определяется суммированием коэффициентов жесткости конечных элементов, связанных с узловыми точками. Так, если конечные элементы m , n и p примыкают к узловой точке i полной системы, то коэффициент ее

жесткости в этой точке

$$k_{ii} = \hat{k}_{ii}^{(m)} + \hat{k}_{ii}^{(n)} + \hat{k}_{ii}^{(p)}, \quad (10.23)$$

где верхние индексы обозначают конечные элементы.

Перед объединением конечных элементов их жесткости должны быть приведены к общей системе координат, в которой рассматриваются перемещения сооружения в целом. Символы \wedge для слагаемых выражения (10.23) указывают, что они преобразованы от местной системы координат [см., например, зависимости (10.22)] к общим координатам.

Пример 10.1. Определение матрицы жесткости является основной процедурой метода перемещений в матричной форме, используемой в статике сооружений. Хотя более общее рассмотрение этих вопросов выходит за рамки настоящей книги по динамике сооружений, полезно иллюстрировать эту процедуру на примере простой рамной конструкции, как используются коэффициенты жесткости элементов для выражения (10.22).

Рассмотрим раму, показанную на рис. 10.6, а. Если принять, что элементы рамы не испытывают осевых деформаций, то ее узлы имеют три степени свободы. Соответствующие коэффициенты жесткости могут быть определены последовательным приложением единичных перемещений вдоль каждой из степеней свободы с одновременным ограничением других и вычислением усилий в каждом элементе с помощью выражений (10.22).

Когда рассматривается боковое перемещение рамы (см. рис. 10.6, б), деформации испытывают только вертикальные элементы. Узловые силы для них определяются элементами 1, 3 и 4 в первом столбце матрицы жесткости (10.22), и коэффициент жесткости k_{11} для рамы содержит члены, характеризующие деформации каждой колонны.

При повороте в узле (см. рис. 10.6, в) коэффициент жесткости k_{22} определяется деформациями ригеля и левой колонны, причем соответствующие коэффициенты принимаются по элементу третьего столбца матрицы (10.22). На величины k_{13} влияет только левая колонна, а на k_{33} — только ригель. Коэффициенты жесткости при повороте правого узла определяются аналогично. Таким образом, для рамы в целом матрица жесткости

$$\begin{bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ f_{s3} \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & 3L \\ 3L & 6L^2 & 2L^2 \\ 3L & 2L^2 & 6L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

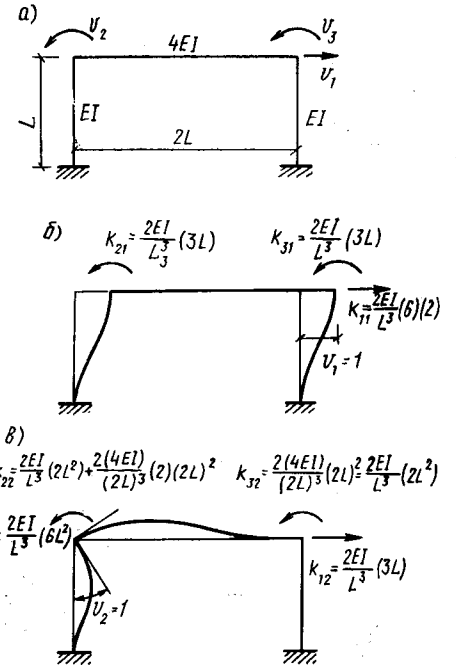


Рис. 10.6. Анализ коэффициентов жесткости рамы:

а — характеристики рамы и степени свободы; б — реакции при перемещении $v_1=1$; в — реакция при повороте $v_2=1$

10.2. ИНЕРЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

10.2.1. Матрица сосредоточенных масс. Наиболее простой метод определения характеристик масс для любой системы связан с предположением, что полная масса сосредоточивается в точках определения поступательных перемещений. Обычный прием задания точечной массы в каждом узле заключается в расчленении системы на отдельные элементы с узлами в точках их сопряжения.

На рис. 10.7 этот прием показан для балочной системы. Масса каждого элемента предполагается сосредоточенной в узловых точках, а распределенные массы определяются методами статики сооружений.

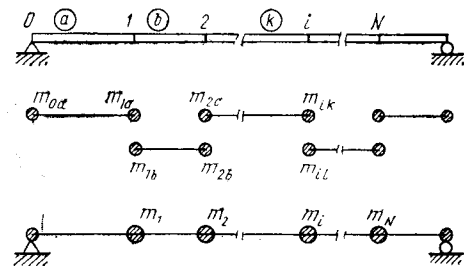


Рис. 10.7. Сосредоточенные массы в узлах балки

Общая масса, сосредоточенная в любой узловой точке составной системы, равна сумме узловых масс элементов, сопрягаемых в данном узле. Для балки на рис. 10.7 масса в каждой узловой точке определяется массами двух соседних элементов, например $m_1 = m_{1a} + m_{1b}$. Если рассматриваются только поступательные степени

свободы, то система имеет матрицу сосредоточенных масс диагонального типа. Для балки на рис. 10.7 получаем:

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_i & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_N \end{bmatrix}, \quad (10.24)$$

в которой число строк равно числу степеней свободы. Недиagonальные члены матрицы равны нулю, так как ускорение любой массы определяется приложением инерционной силы только к этой массе. Инерционная сила в точке i при приложении к ней единичного ускорения, естественно, равна массе, сосредоточенной в этой точке. Таким образом в матрице сосредоточенных масс $m_{ii} = m_i$.

Если с любой узловой точкой связана больше, чем одна степень свободы поступательных перемещений, то масса в этой точке учитывается для каждой степени свободы. Для степеней свободы, характеризующих углы поворота, коэффициенты масс равны нулю, так как по определению сосредоточенные массы не имеют моментов инерции поворота. Если каждой степени свободы в виде углов поворота соответствуют конечные моменты инерции, то в матрицу инерционных характеристик войдут соответствующие диагональные эле-

менты. Таким образом, матрица сосредоточенных масс — диагональная матрица, в которой элементы по диагонали для степеней свободы в виде углов поворота равны нулю.

10.2.2. Матрица распределенных масс. Используя МКЭ, коэффициенты масс для каждого элемента сооружения можно определить аналогично коэффициентам жесткости. Рассмотрим в качестве примера элемент балки с неравномерным распределением жесткостей, показанный на рис. 10.8. Степени свободы для элемента являются перемещение и поворот каждого конца. Предполагается, что пере-

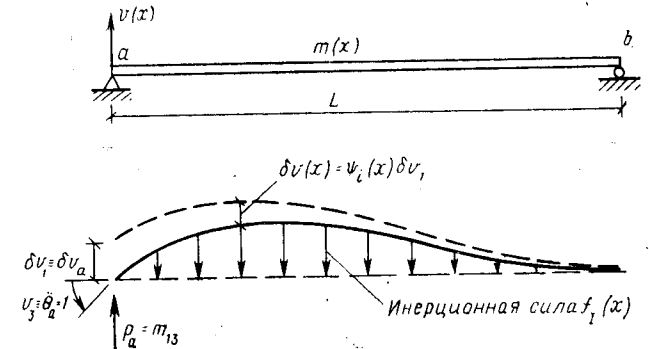


Рис. 10.8. Узел под действием реального углового ускорения и виртуального перемещения

мещение элемента вдоль его пролета характеризуются функциями $\psi_i(x)$, уже использованными при определении жесткости элемента.

Если балка испытывает единичное угловое ускорение левой опоры $\ddot{v}_3 = \ddot{\theta}_a = 1$, то ускорение вдоль пролета элемента распределяется по закону

$$\ddot{v}(x) = \psi_3(x) \ddot{v}_3, \quad (10.25)$$

который может быть получен в результате двойного дифференцирования по времени выражения (10.17). Согласно принципу Даламбера, инерционная сила при этом равна:

$$f_I(x) = m(x) \ddot{v}(x) = m(x) \psi_3(x) \ddot{v}_3. \quad (10.26)$$

Теперь определим коэффициенты масс, характеризующие узловые инерционные силы, которые вызываются этим ускорением. Они могут быть вычислены с помощью принципа возможных перемещений для распределенной инерционной силы (10.26). Например, вертикальная сила на левой опоре может быть определена при рассмотрении возможного вертикального перемещения и в результате приравнивания работы внешней узловой силы p_a работе, производимой распределенными инерционными силами $f_I(x)$. Тогда

$$p_a \delta v_a = \int_0^L f_I(x) \delta v(x) dx.$$

Выражая внутренние возможные перемещения через интерполяционные функции, из (10.26) получаем:

$$m_{13} = \int_0^L m(x) \psi_1(x) \psi_3(x) dx. \quad (10.27)$$

Коэффициенты влияния масс на рис. 10.8 характеризуют инерционные силы, направленные противоположно ускорениям, но количественно совпадающие с внешними нагрузками, которые вызывают эти ускорения.

По аналогии с (10.27) соответствующий коэффициент влияния масс m_{ij} может быть определен для произвольного элемента балки с помощью эквивалентного выражения

$$m_{ij} = \int_0^L m(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx. \quad (10.28)$$

Симметричная форма этого выражения свидетельствует о том, что матрица масс (как и матрица жесткостей) симметричная, т. е. $m_{ji} = m_{ij}$. Можно также видеть, что это выражение совпадает с соответствующим слагаемым в (1.37) при $i = j$. Когда коэффициенты матрицы масс вычисляются с помощью интерполяционных функций, использованных при определении коэффициентов жесткости, получаемая матрица называется *матрицей распределенных масс*. На практике кубические полиномы Эрмита (10.16) используются для определения матрицы масс любого прямолинейного элемента балки. Для балки с равномерно распределенной массой как для частного случая получаем:

$$\begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{14} \end{bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 54 & 22L & -13L \\ 54 & 156 & 13L & -22L \\ -22L & 13L & 4L^2 & -3L^2 \\ -13L & -22L & -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \\ \ddot{v}_4 \end{bmatrix}. \quad (10.29)$$

После вычисления коэффициентов масс для элементов системы матрица масс для системы в целом определяется методом суперпозиции аналогично определению матрицы жесткостей (10.23). Получаемая в результате матрица масс, как правило, имеет ту же структуру, как и матрица жесткостей.

Динамический анализ системы с распределенными массами обычно требует более сложных вычислений, чем системы с сосредоточенными массами по двум причинам: во-первых, матрица сосредоточенных масс диагональная, а матрица распределенных масс имеет много недиагональных элементов (что приводит к так называемой инерционной взаимосвязи системы) и, во-вторых, степени свободы в виде угла поворота могут быть выделены при анализе систем с сосредоточенными массами (методом уплотнения, рассмотренным ниже), в то время как при анализе систем с распределенными параметрами как поступательные, так и вращательные компоненты должны быть включены в общие выражения динамических характеристик,

Пример 10.2. Для системы, рассмотренной в примере 10.1 и показанной на рис. 10.9, а, проследим последовательность определения матриц масс. Сначала находят матрицу сосредоточенных масс. При этом половина массы каждого элемента принимается сосредоточенной на концах стержня (см. рис. 10.9, б). Четыре массы в уровне ригеля определяют коэффи-

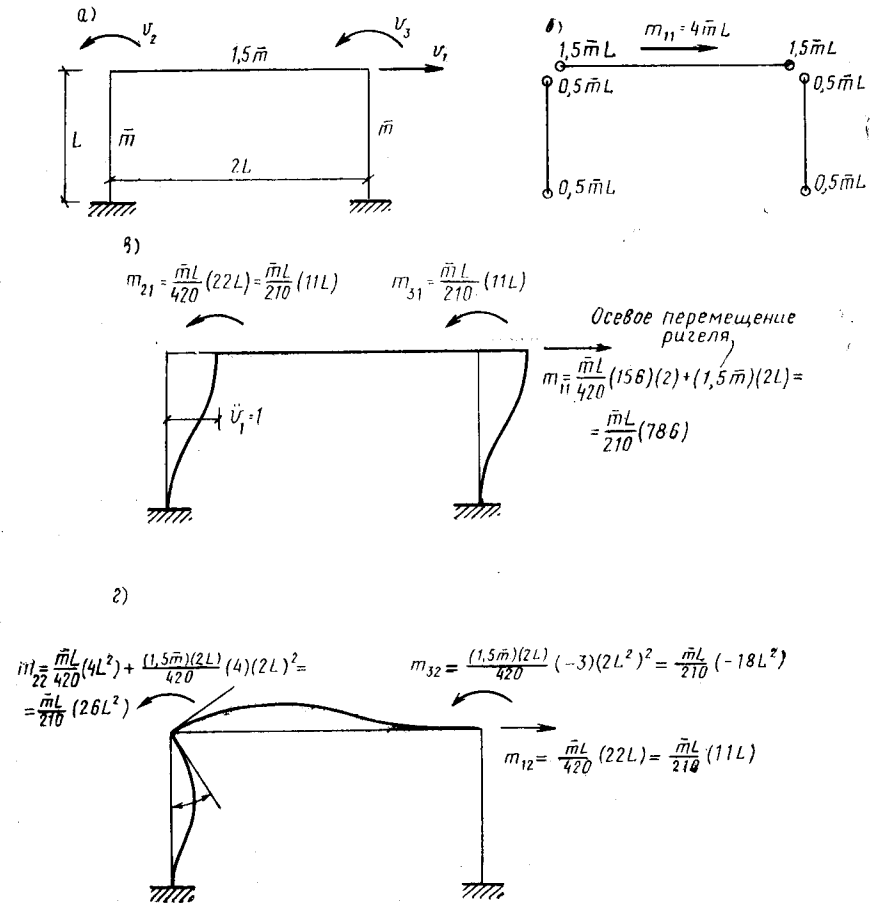


Рис. 10.9. Анализ матриц сосредоточенных и распределенных масс а — равномерно распределенная масса элементов; б — дискретизация масс в конечных сечениях элемента; в — силы от ускорения $\ddot{v}_1=1$; г — силы от ускорения $\ddot{v}_2=1$ (распределенные массы)

циент m_{11} при горизонтальном перемещении рамы. С другими степенями свободы не связаны никакие коэффициенты масс, так как точечные массы не имеют инерции вращения.

Матрицу распределенных масс определяют последовательным применением единичного ускорения вдоль каждой степени свободы и нахождением результирующих инерционных сил в соответствии с выражением (10.29). При этом перемещения по всем другим степеням свободы считаются стесненными.

Рассматривая сначала горизонтальное ускорение поступательного движения (см. рис. 10.9, в), отметим, что определяемые коэффициенты относятся

только к поперечным силам инерции, возникающим в колоннах. Сила инерции ригеля при его поступательном перемещении вдоль продольной оси должна быть добавлена, как показано на рисунке, в виде инерции жесткого тела ($3 \bar{m}L$).

Ускорения при повороте узлов рамы вызывают ускорения только в направлении, перпендикулярном осям элементов. Соответствующие коэффициенты для колонны и ригеля приведены на рис. 10,9, г. На основании результатов расчетов получены следующие матрицы сосредоточенных и распределенных параметров инерции (матрицы масс):

$$m = \frac{\bar{m}L}{210} \begin{bmatrix} 840 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, m = \frac{\bar{m}L}{210} \begin{bmatrix} 786 & 11L & 11L \\ 11L & 26L^2 & -18L^2 \\ 11L & -18L^2 & 26L^2 \end{bmatrix}.$$

10.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАТУХАНИЯ

Если в системе возникают разные силы затухания, их величины могут быть найдены с помощью метода конечных элементов. Например, коэффициент затухания для любого элемента может быть определен следующим выражением [сравните с зависимостью (1.38)]:

$$c_{ij} = \int_0^L c(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx, \quad (10.30)$$

где $c(x)$ характеризует распределенное вязкое затухание в системе.

После определения коэффициентов затухания для каждого элемента матрица сил затухания для системы в целом может быть найдена методом суперпозиции, эквивалентным прямому методу жесткостей. Однако в практических расчетах определять характеристику затухания $c(x)$ или другие характеристики затухания в аналогичном виде нецелесообразно. Обычно параметры затухания выражаются в форме относительных коэффициентов затухания и определяются на основании экспериментов. Если требуется найти матрицу затухания c , то, как правило, она определяется по известным параметрам затухания (см. гл. 12).

10.4. ВНЕШНИЕ НАГРУЗКИ

Если динамическая нагрузка на систему состоит из сосредоточенных сил, направленных вдоль координат перемещений, то можно сразу определить вектор сил в форме (9.2). В общем случае нагрузки могут быть приложены как в узлах, так и в других точках системы, а также могут включать распределенные нагрузки. В этом случае параметры нагрузки в (9.2) рассматриваются как обобщенные силы, связанные с компонентами перемещений. Два метода определения обобщенных сил будут рассмотрены в следующих параграфах.

10.4.1. Равнодействующие статических сил. Наиболее простой метод определения эффективных узловых сил при действии распределенной нагрузки между узлами основан на использовании принципов статики сооружений: узловые силы определяются как систе-

ма сосредоточенных нагрузок, статически эквивалентных действию распределенной нагрузки. По существу анализ выполняется при условии, что действительные нагрузки приложены к системе через несколько простых балочек, опертых в узловых точках. Силы реакции по концам этих балочек принимаются в качестве узловых сосредоточенных нагрузок на систему. При таком анализе обобщенные силы рассматриваются только вдоль поступательных степеней свободы, узловые силы поворота равны нулю, если внешние моменты приложены непосредственно к узлам.

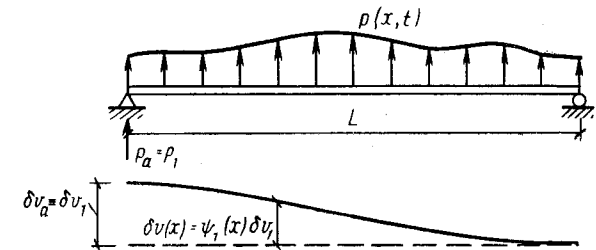


Рис. 10.10. Возможное узловое перемещение балки, к которой приложена поперечная нагрузка

10.4.2. Приведенные узловые нагрузки. Другой метод определения узловых сил, соответствующих всем степеням свободы узлов, может быть развит на основе МКЭ. Он основан на принципе возможных перемещений так же, как при определении матрицы приведенных масс. Получаемые обобщенные узловые силы называются *приведенными узловыми нагрузками*. Рассмотрим, как и при анализе приведенных масс, элемент балки, к которому приложена внешняя динамическая нагрузка (рис. 10.10). При возможном перемещении δv_1 по условию равенства работ внешних и внутренних сил обобщенная сила, соответствующая v_1 , равна:

$$p_1(t) = \int_0^L p(x, t) \psi_1(x) dx. \quad (10.31)$$

Для обобщенных сил, действующих на любой элемент,

$$p_i(t) = \int_0^L p(x, t) \psi_i(x) dx. \quad (10.32)$$

Обобщенная сила p_3 , соответствующая $v_3 = \theta_a$, представляет собой внешний момент, приложенный в точке a . Положительное значение обобщенных сил соответствует положительным направлениям осей координат. Следует отметить эквивалентность выражения (10.32) выражению (1.11).

Для систем с приведенными нагрузками интерполяционные функции $\psi_i(x)$ в (10.32) могут приниматься теми же, как при определении коэффициентов жесткости элементов. Если вместо них использовать линейные функции

$$\psi_1(x) = 1 - \frac{x}{L}; \quad \psi_2(x) = \frac{x}{L}, \quad (10.33)$$

то из выражения (10.32) можно получить статические равнодействующие в узловых точках. На практике этот прием считается самым простым при вычислении статически эквивалентных нагрузок.

Для ряда случаев приложенная нагрузка может быть представлена в форме

$$p(x, t) = \chi(x) \zeta(t), \quad (10.34)$$

где форма изменения нагрузки $\chi(x)$ не изменяется во времени, а изменяются только амплитуды колебаний. В этом случае обобщенные силы имеют вид

$$p_i(t) = \zeta(t) \int_0^L \chi(x) \psi_i(x) dx, \quad (10.34a)$$

из которого следует, что обобщенная сила изменяется во времени как приложенная нагрузка. Интегральное выражение показывает, как влияет нагрузка на величины развиваемых обобщенных сил.

Когда в соответствии с (10.32) вычислены обобщенные силы, действующие на каждый элемент, общую эффективную нагрузку в узловых точках соединенной системы можно получить методом суперпозиции, эквивалентным прямому методу жесткостей.

10.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЖЕСТКОСТЬ

10.5.1. Линейная аппроксимация. Геометрическая жесткость сооружения характеризует его способность к потере устойчивости при продольном изгибе под действием осевых составляющих внешних нагрузок. Характеристики геометрической жесткости зависят не только от формы сооружения, но и от схемы нагружения. Предполагается, что силы, приводящие к потере устойчивости, остаются постоянными в течение всего процесса динамического нагружения. Считается, что они возникают от постоянных статических нагрузок и незначительно влияют на динамическую реакцию сооружения. В тех случаях когда эти нагрузки существенно изменяются во времени, их влияние отражается на переменных во времени жесткостных характеристиках. Для таких нелинейных систем методы расчета с использованием принципа суперпозиции становятся неприменимыми.

Как правило, два различных уровня идеализации могут быть использованы при определении характеристик геометрической жесткости с более или менее совместным учетом матриц масс и векторов нагрузок, введенных ранее. Наиболее простое приближение удобно описать с помощью физической модели на рис. 10.11, для которой принято, что все осевые нагрузки действуют на вспомогательную систему, состоящую из отдельных жестких звеньев, соединенных шарнирно. Шарниры располагаются в точках, с которыми связаны поперечные перемещения действительной балки, и присоединяются к

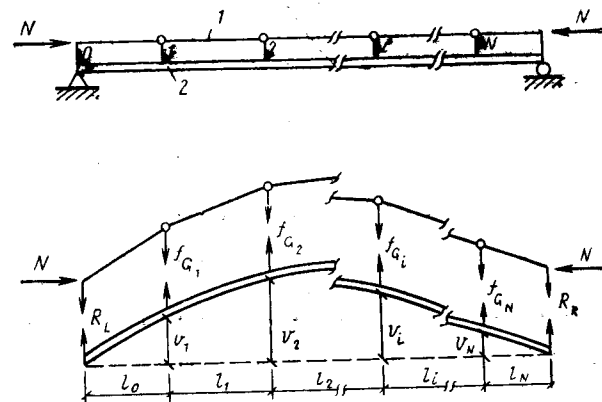


Рис. 10.11. Модель влияния осевой нагрузки в балке: 1 — звено вспомогательной системы; 2 — конструкция реальной балки

основной балке вставками, которые могут передавать только поперечные силы без осевых составляющих нагрузки.

При прогибах действительной балки под любой нагрузкой вспомогательная система из звеньев деформируется по той же форме (см. рисунок). В результате этих прогибов и осевых усилий в звеньях вспомогательной системы возникают усилия во вставках, соединяющих эту систему с балкой. Другими словами, для обеспечения устойчивости вспомогательной системы необходима способность основной балки сопротивляться внешним нагрузкам.

Силы, необходимые для равновесия типового звена i вспомогательной системы, показаны на рис. 10.12. Поперечные силы f_{G_i} и f_{G_j} зависят от величины осевой силы N_i в звене и от угла наклона. Они считаются положительными, если направлены параллельно положительной оси перемещений главной балки. В матричной форме эти силы принимают следующий вид:

$$\begin{bmatrix} f_{G_i} \\ f_{G_j} \end{bmatrix} = \frac{N_i}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix}. \quad (10.35)$$

Объединяя такие зависимости для всех звеньев, можно записать выражения для поперечных сил, действующих на балку и возникаю-

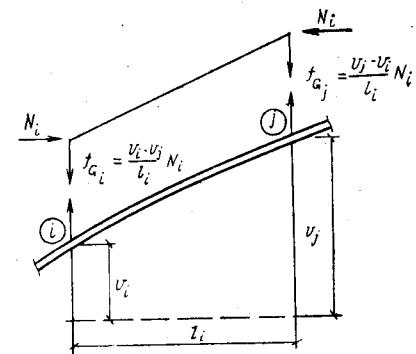


Рис. 10.12. Равновесие сил от осевых нагрузок в звене вспомогательной системы

щих от действия осевых нагрузок (см. рис. 10.11):

$$\begin{bmatrix} f_{G1} \\ f_{G2} \\ \dots \\ f_{Gi} \\ \dots \\ f_{GN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N_0}{l_0} + \frac{N_1}{l_1} & -\frac{N_1}{l_1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -\frac{N_1}{l_1} & \frac{N_1}{l_1} + \frac{N_2}{l_2} & -\frac{N_2}{l_2} & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{N_{i-1}}{l_{i-1}} + \frac{N_i}{l_i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_i \\ \dots \\ v_N \end{bmatrix} \quad (10.36)$$

Величина осевых нагрузок может изменяться при переходе от одного звена к другому. Для системы и схемы нагружения, приведенной на рис. 10.11, все осевые силы равны и N может быть вынесена за пределы матрицы.

В символической форме зависимости (10.36) могут быть представлены следующим образом:

$$f_G = k_G v, \quad (10.37)$$

где квадратная симметричная матрица k_G называется *матрицей геометрической жесткости*, или матрицей жесткостей, определяемых геометрией системы. Для упругой модели балки эта матрица является трехдиагональной [см. (10.36)]. Элементы матрицы по главной диагонали характеризуют влияние двух смежных звеньев, а верхняя наддиагональ и нижняя поддиагональ содержат по одному слагаемому и характеризуют взаимную связь звеньев.

10.5.2. Приведенная геометрическая жесткость. Для более точного определения геометрической жесткости, как и при определении других динамических характеристик, может быть использован метод МКЭ. Рассмотрим тот же элемент балки при действии распределенных осевых нагрузок, которые могут быть результатом приложения произвольно изменяющейся осевой силы $N(x)$, как показано на рис. 10.13. На нижнем рисунке показана балка при единичном повороте левой опоры $v_3 = 1$. Узловые силы, связанные с этой компонентой перемещений, представляют собой коэффициенты влияния геометрической жесткости, например, k_{G13} — вертикальная сила, приложенная к левой опоре. Эти коэффициенты можно определить, рассматривая возможные перемещения и приравнявая работу внешних и внутренних сил. При определении виртуальной работы внешних сил на перемещении δv_1 получим:

$$W_E = f_{Ga} \delta v_a = k_{G13} \delta v_1, \quad (10.38)$$

где положительное значение k_{G13} соответствует положительным перемещениям.

Для вычисления виртуальной работы внутренних сил необходимо рассмотреть бесконечно малый элемент dx системы на рис. 10.13, который в увеличенном масштабе показан на рис. 10.14. Работа, производимая для такого элемента осевой силой $N(x)$ при возможном его перемещении, равна:

$$dW_I = N(x) d(\delta e), \quad (10.39)$$

где $d(\delta e)$ — отрезок, на который сближаются две силы, действующие на элемент.

Из подобия треугольников (см. рис. 10.14)

$$d(\delta e) = \frac{dv}{dx} d(\delta v).$$

Перемена знаков дифференцирования и вариаций в правой части этого равенства приводит к выражению

$$d(\delta e) = \frac{dv}{dx} \delta \left(\frac{dv}{dx} dx \right),$$

и, подставляя результат в (10.39), получаем:

$$dW_I = N(x) \frac{dv}{dx} \delta \left(\frac{dv}{dx} \right) dx.$$

Если выразить боковые перемещения через интерполяционные функции, то после интегрирования получим:

$$W_I = \delta v_1 \int_0^L N(x) \frac{d\psi_3(x)}{dx} \frac{d\psi_1(x)}{dx} dx. \quad (10.40)$$

И, наконец, приравнявая работу внутренних и внешних сил, получаем коэффициент геометрической жесткости

$$k_{G13} = \int_0^L N(x) \psi_3'(x) \psi_1'(x) dx \quad (10.41)$$

или коэффициент общего вида

$$k_{Gij} = \int_0^L N(x) \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx. \quad (10.42)$$

Следует отметить эквивалентность этого выражения условию (1.40a), а также его симметричность, т. е. $k_{Gij} = k_{Gji}$.

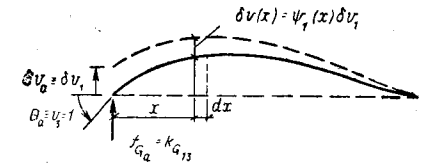
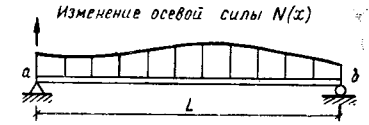


Рис. 10.13. Центральная нагруженная балка при действительном повороте и виртуальном перемещении узла

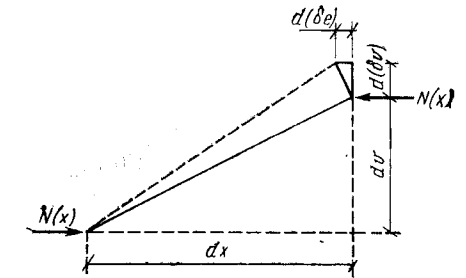


Рис. 10.14. Бесконечно малый элемент деформированной балки на рис. 10.13.

Если в качестве интерполяционных функций используются полиномы Эрмита (10.16), то получаемая матрица коэффициентов геометрической жесткости называется *матрицей приведенной геометрической жесткости*. При постоянной осевой нагрузке по длине элемента матрица приведенной геометрической жесткости имеет вид

$$\begin{bmatrix} f_{G1} \\ f_{G2} \\ f_{G3} \\ f_{G4} \end{bmatrix} = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -36 & 3L & 3L \\ -36 & 36 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 4L^2 & -L^2 \\ 3L & -3L & -L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}. \quad (10.43)$$

Если же при определении (10.42) используются линейные функции (10.33) и осевая сила постоянна по длине элемента, то получим матрицу жесткостей в форме (10.35).

Объединение коэффициентов геометрической жесткости для нахождения матрицы геометрической жесткости системы в целом производится точно так же, как и матрицы упругой жесткости, и приводит к аналогичной форме (расположению ненулевых членов). Таким образом, матрица приведенной геометрической жесткости характеризует как вращательные, так и поступательные степени свободы, в то время как линейное приближение (10.35) справедливо только для поступательных перемещений. В то же время каждая из зависимостей может быть записана в символической форме (10.37).

10.6. ВЫБОР ФОРМЫ ЗАПИСИ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

В ранее изложенном материале рассмотрены два разных уровня аппроксимации при определении характеристик масс, геометрической жесткости и внешних нагрузок:

1) элементарный подход, учитывающий только поступательные степени свободы сооружения;

2) принцип приведения, который позволяет учесть как вращательные, так и поступательные перемещения.

Первый метод значительно проще, поскольку упрощается не только определение динамических характеристик, но и существенно сокращается число степеней свободы, необходимых для анализа сооружения. В принципе метод приведения дает более точные результаты, но практически это улучшение оказывается незначительным. Как правило, степени свободы в виде компонент углов поворота оказывают меньшее влияние, чем поступательные степени свободы. Основное преимущество метода приведения состоит в том, что он дает возможность оценить вклад всех составляющих энергии в реакцию сооружения и позволяет судить о границах частот колебаний. Однако это преимущество редко компенсирует возникающие дополнительные трудности.

Использование метода сосредоточенных масс при определении матрицы жесткости в рамках МКЭ или любой другой методики,

требующей учета вращательных степеней свободы, затрудняет расчет. Если при определении всех других динамических характеристик эти компоненты исключены из рассмотрения, то перед составлением уравнений движения их необходимо также исключить из матрицы жесткости.

Процесс исключения нежелательных степеней свободы из матрицы жесткости называется *статическим уплотнением*. В рамках настоящего изложения предположим, что степени свободы поступательных и вращательных перемещений разделены и соотношение (9.5) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} k_{tt} & k_{t\theta} \\ k_{\theta t} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_t \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{St} \\ f_{S\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{St} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10.44)$$

где v_t — поступательные перемещения и v_θ — углы поворота, а подматрицы коэффициентов жесткости имеют для определенности соответствующие индексы.

Если ни один из других векторов сил не содержит компонент вращения, упругие силы поворота равны нулю, т. е. $f_{S\theta} = 0$. После учета этих ограничений в (10.44) можно выразить перемещения поворота через вторую подматрицу уравнения (10.44):

$$v_\theta = -k_{\theta\theta}^{-1} k_{\theta t} v_t. \quad (10.45)$$

Подставляя это соотношение в первую подматрицу (10.44), получаем:

$$(k_{tt} - k_{t\theta} k_{\theta\theta}^{-1} k_{\theta t}) v_t = f_{St}$$

или

$$k_t v_t = f_{St}, \quad (10.46)$$

где $k_t = k_{tt} - k_{t\theta} k_{\theta\theta}^{-1} k_{\theta t}$ (10.47) — упругая жесткость при поступательных перемещениях.

Эта матрица удобна для использования в сочетании с выражениями для других динамических характеристик, т. е. относится к матрице жесткости на рис. 10.2.

Пример 10.3. Для иллюстрации метода статического уплотнения две компоненты поворота будут исключены из матрицы жесткости, определенной в примере 10.1. Уплотненная матрица жесткости будет содержать только поступательные степени свободы рамы и сопоставима с матрицей сосредоточенных масс, определенных в примере 10.2.

Подматрица жесткости, связанная со степенями свободы вращения для примера 10.1, равна:

$$k_{\theta\theta} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 6L^2 \end{bmatrix} = \frac{4EI}{L} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

а обратная ей матрица

$$k_{\theta\theta}^{-1} = \frac{L}{32EI} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Если ее подставить в (10.45), то степени свободы вращения могут быть выражены через поступательные перемещения

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = -\frac{L}{32EI} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 3L \\ 3L \end{bmatrix} v_1 = -\frac{3}{8L} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v_1.$$

Тогда уплотненная матрица жесткости согласно (10.47) равна:

$$k_t = \frac{2EI}{L^3} \left(12 - [3L \ 3L] \begin{bmatrix} 3 \\ 8L \\ 3 \\ 8L \end{bmatrix} \right) = \frac{2EI}{L^3} \frac{39}{4}.$$

ГЛАВА 11

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕЗ УЧЕТА ЗАТУХАНИЯ

11.1. АНАЛИЗ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Уравнения свободных колебаний недемпфированной системы могут быть получены приравниванием нулю матрицы затухания и вектора внешних нагрузок в уравнении (9.13)

$$m\ddot{v} + kv = 0, \quad (11.1)$$

где 0 — нулевой вектор.

Задача анализа колебаний заключается в определении условий, при которых (11.1) допускает существование колебаний системы. По аналогии с анализом системы с одной степенью свободы предположим, что свободные колебания имеют вид простых гармонических колебаний.

Для системы со многими степенями свободы это соответствует выражению

$$v(t) = \hat{v} \sin(\omega t + \theta). \quad (11.2)$$

В этом выражении \hat{v} характеризует форму колебания системы, у которой изменяются только амплитуды, и θ — фазовый угол.

Если взять вторую производную по времени от (11.2), то получим ускорение свободных колебаний

$$\ddot{v} = -\omega^2 \hat{v} \sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 v. \quad (11.3)$$

Подставляя уравнения (11.2) и (11.3) в (11.1), получаем:

$$-\omega^2 m \hat{v} \sin(\omega t + \theta) + k \hat{v} \sin(\omega t + \theta) = 0,$$

которое [поскольку член в виде $\sin(\omega t + \theta)$ выбран произвольно и может быть опущен] можно представить в форме

$$[k - \omega^2 m] \hat{v} = 0. \quad (11.4)$$

По правилу Крамера совместное решение этой системы уравнений дает

$$\hat{v} = \frac{0}{\|k - \omega^2 m\|}, \quad (11.5)$$

откуда нетривиальное решение возможно, только когда определитель знаменателя равен нулю. Другими словами, существование конечных амплитуд при свободных колебаниях системы возможно, если только

$$\|k - \omega^2 m\| = 0. \quad (11.6)$$

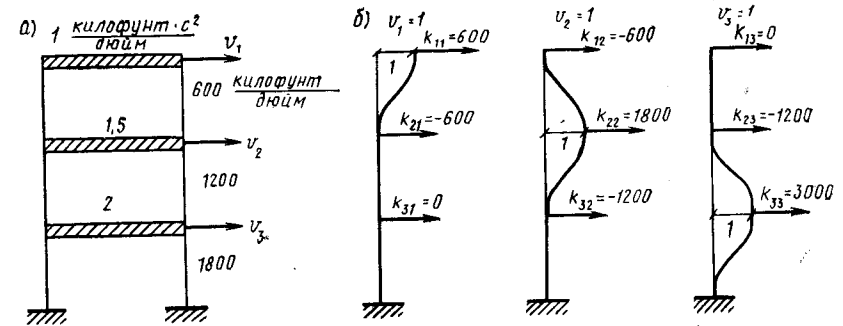


Рис. 11.1. Пример анализа колебаний рамы
а — схема рамы; б — коэффициенты матрицы жесткости

Уравнение (11.6) называется *частотным уравнением* системы. Раскрывая определитель, получаем для системы с N степенями свободы алгебраическое уравнение N -й степени относительно параметра частот ω^2 . N корней этого уравнения ($\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots, \omega_N^2$) представляют собой частоты N форм собственных колебаний системы. Форма колебаний, соответствующая самой низкой частоте, называется первой, а следующая с более высокой частотой — второй и т. д. Вектор, составленный из полной системы модальных частот в соответствующей последовательности, называется *вектором собственных частот* ω .

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_N \end{bmatrix}. \quad (11.7)$$

Можно показать, что для действительных симметричных и положительно определенных матриц масс и жесткостей (это условие характеризует устойчивость конструкций) все корни частотного уравнения будут действительными и положительными.

Пример 11.1. Анализ частот колебаний решением уравнения для определителя покажем на примере системы на рис. 11.1 — той же рамы, для которой в примере 8.3 проводился приближенный анализ частоты основного тона

колебаний с помощью метода Релея. Матрицу жесткости этой рамы определяют последовательным приложением единичных перемещений к каждому этажу и определением возникающих при этом поэтажных сил упругости (см. рис. 11.1). Поскольку ригели рамы предполагаются бесконечно жесткими, силы упругости определяют простым сложением жесткостей соответствующих этажей.

Матрицы масс и жесткостей рамы равны:

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 2,0 \end{bmatrix} \times 1 \text{ килофунт} \cdot \text{с}^2 / \text{дюйм} \text{ [или } 0,178 \text{ тс} \cdot \text{с}^2 / \text{см}],$$

$$k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \times 600 \text{ килофунт/дюйм} \text{ [или } 107 \text{ тс/см}],$$

откуда

$$k - \omega^2 m = \begin{bmatrix} 1-B & -1 & 0 \\ -1 & 3-1,5B & -2 \\ 0 & -2 & 5-2B \end{bmatrix} \times 600 \text{ килофунт/дюйм} \text{ [или } 107 \text{ тс/см}], \quad (\text{a})$$

$$\text{где } B \equiv \frac{\omega^2}{600} \left[\text{или } \frac{0,178\omega^2}{107} \right].$$

Частоты собственных колебаний рамы определяют путем приравнивания к нулю детерминанта квадратной матрицы (a) $\Delta = 0$. Раскрытие этого определителя приводит к кубическому уравнению $B^3 - 5,5 B^2 + 7,5 B - 2 = 0$.

Три корня этого уравнения можно определить непосредственно или методом проб и ошибок. Их величины равны: $B_1 = 0,351$; $B_2 = 1,61$; $B_3 = 3,54$, откуда частоты

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 \\ 966 \\ 2124 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,5 \\ 31,1 \\ 46,1 \end{bmatrix} \text{ рад/с.}$$

11.2. АНАЛИЗ ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Когда из уравнения (11.6) определены частоты собственных колебаний, уравнения (11.4) могут быть записаны в виде

$$\tilde{E}^{(n)} \hat{v}_n = 0, \quad (11.8)$$

$$\text{где } \tilde{E}^{(n)} = k - \omega_n^2 m. \quad (11.9)$$

Таким образом, $\tilde{E}^{(n)}$ представляет собой матрицу, полученную после вычитания $\omega_n^2 m$ из матрицы жесткостей. Поскольку она зависит от частоты, то является различной для каждой формы колебаний. Уравнение (11.8) удовлетворяется тождественно, так как из этого условия были получены частоты собственных колебаний. Поэтому амплитуды колебаний являются неопределенными. Однако формы колебаний системы можно определить, выражая все перемещения через одну из составляющих.

Поэтому предположим, что первый элемент вектора перемещений имеет амплитуду, равную единице, т. е.

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_{1n} \\ \hat{v}_{2n} \\ \hat{v}_{3n} \\ \vdots \\ \hat{v}_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{v}_{2n} \\ \hat{v}_{3n} \\ \vdots \\ \hat{v}_{Nn} \end{bmatrix}. \quad (11.10)$$

В развернутой форме уравнение (11.8) имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} e_{11}^{(n)} & e_{12}^{(n)} & e_{13}^{(n)} & \dots & e_{1N}^{(n)} \\ e_{21}^{(n)} & e_{22}^{(n)} & e_{23}^{(n)} & \dots & e_{2N}^{(n)} \\ e_{31}^{(n)} & e_{32}^{(n)} & e_{33}^{(n)} & \dots & e_{3N}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{N1}^{(n)} & e_{N2}^{(n)} & e_{N3}^{(n)} & \dots & e_{NN}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{v}_{2n} \\ \hat{v}_{3n} \\ \dots \\ \hat{v}_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11.11)$$

где пунктиром отделены пока еще неизвестные амплитуды перемещений. Для удобства уравнение (11.11) записывают в символической форме

$$\begin{bmatrix} e_{11}^{(n)} & \tilde{E}_{10}^{(n)} \\ \tilde{E}_{01}^{(n)} & \tilde{E}_{00}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{v}_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11.11a)$$

откуда

$$\tilde{E}_{01}^{(n)} + \tilde{E}_{00}^{(n)} \hat{v}_{0n} = 0 \quad (11.12)$$

и

$$e_{11}^{(n)} + \tilde{E}_{10}^{(n)} \hat{v}_{0n} = 0. \quad (11.13)$$

Уравнение (11.12) может быть одновременно решено для амплитуд колебаний

$$\hat{v}_{0n} = -(\tilde{E}_{00}^{(n)})^{-1} \tilde{E}_{01}^{(n)}. \quad (11.14)$$

Уравнение (11.13) однородное, поскольку тождественно удовлетворено условие (11.7). Вектор перемещений, определяемый выражением (11.14), должен удовлетворять условию (11.13), и проверка этого равенства является хорошим методом контроля точности решения. Однако не всегда первый элемент вектора перемещений целесообразно принимать равным единице. Точность численного анализа возрастает, если в качестве единичного элемента принять одну из больших амплитуд перемещений. Сама последовательность вычислений при этом сохраняется, но необходимо соответствующим образом поменять местами строки и столбцы матрицы $\tilde{E}^{(n)}$.

Амплитуды перемещений, определяемые выражением (11.14), вместе с единичным перемещением первой компоненты образуют вектор перемещений, соответствующий n -й форме колебаний. Для

удобства записи вектор обычно представляют в безразмерной форме путем деления всех элементов на один из них, обычно самый большой по величине. Полученный в результате вектор называется вектором формы колебаний Φ_n для n -го тона:

$$\Phi_n = \begin{bmatrix} \Phi_{1n} \\ \Phi_{2n} \\ \Phi_{3n} \\ \dots \\ \Phi_{Nn} \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{\hat{v}_{kn}} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{v}_{2n} \\ \hat{v}_{3n} \\ \dots \\ \hat{v}_{Nn} \end{bmatrix}, \quad (11.15)$$

где \hat{v}_{kn} элемент, на который поделены все остальные.

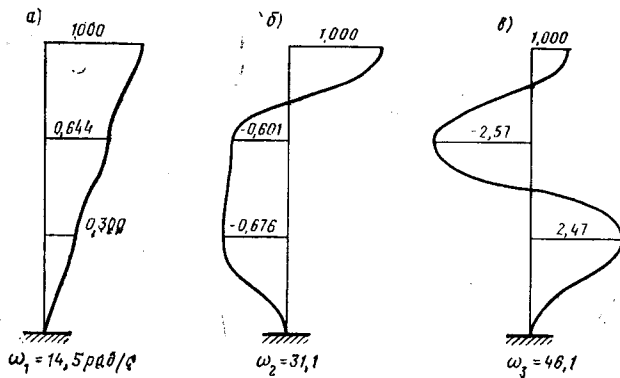


Рис. 11.2. Формы колебаний рамы
а — форма 1; б — форма 2; в — форма 3

Формы колебаний для каждой из N частот могут быть найдены аналогично, и квадратная матрица Φ будет представлять все формы собственных колебаний:

$$\Phi = [\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \dots \Phi_N] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1N} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \dots & \Phi_{2N} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \dots & \Phi_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{N1} & \Phi_{N2} & \dots & \Phi_{NN} \end{bmatrix}. \quad (11.16)$$

Отметим, что изложенный метод анализа частот и форм собственных колебаний строительных конструкций соответствует задачам определения собственных чисел и векторов в алгебраической теории матриц. Квадраты частот представляют собой собственные числа, а формы колебаний — собственные векторы. Краткое изложение методов преобразования уравнений свободных колебаний к стандартной задаче о собственных значениях приведено в гл. 13.

Пример 11.2. Анализ форм колебаний с помощью (11.14) продемонстрируем на примере рамы (рис. 11.1). Матрица частот колебаний была получена в примере 11.1. При использовании второй и третьей строк этой матрицы, следуя (11.14), получим:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{2n} \\ \Phi_{3n} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3 - 1,5B_n & -2 \\ -2 & 5 - 2B_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Далее формы колебаний можно определить, подставляя значение B_n , определенное в примере 11.1, путем обращения и умножения матриц. Три формы колебаний определяют в следующем порядке:

форма 1:

$$B_1 = 0,35; \quad \tilde{E}_{00}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,475 & -2 \\ -2 & 4,300 \end{bmatrix}; \quad (\tilde{E}_{00}^{(1)})^{-1} = \frac{1}{6,68} \begin{bmatrix} 4,300 & 2 \\ 2 & 2,475 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{bmatrix} = \frac{1}{6,68} \begin{bmatrix} 4,300 \\ 2,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,644 \\ 0,300 \end{bmatrix};$$

форма 2:

$$B_2 = 1,61; \quad \tilde{E}_{00}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,585 & -2 \\ -2 & 1,780 \end{bmatrix}; \quad (\tilde{E}_{00}^{(2)})^{-1} = -\frac{1}{2,959} \begin{bmatrix} 1,780 & 2 \\ 2 & 0,585 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2,959} \begin{bmatrix} 1,780 \\ 2,000 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0,601 \\ 0,676 \end{bmatrix};$$

форма 3:

$$B_3 = 3,54; \quad \tilde{E}_{00}^{(3)} = \begin{bmatrix} -2,31 & -2 \\ -2 & -2,08 \end{bmatrix}; \quad (\tilde{E}_{00}^{(3)})^{-1} = \frac{1}{0,81} \begin{bmatrix} -2,08 & 2 \\ 2 & -2,31 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{23} \\ \Phi_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{0,81} \begin{bmatrix} -2,08 \\ 2,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,57 \\ 2,47 \end{bmatrix}.$$

Естественно, что перемещение массы a для каждой формы принято равным единице. Три формы колебаний представлены на рис. 11.2.

11.3. АНАЛИЗ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ТЕРМИНАХ ЕДИНИЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Изложенный метод анализа частот и форм собственных колебаний основан на представлении уравнений движения в виде матрицы жесткостей. Во многих случаях более удобно выразить упругие характеристики системы не в виде матрицы жесткостей, а через матрицу податливости. Тогда уравнения (11.4) легко преобразуются к выражениям для податливостей умножением на $(1/\omega^2) \tilde{f}$, где \tilde{f} матрица податливостей (единичных перемещений), обратная матрице жесткостей k . В результате получаем

$$\left[\frac{1}{\omega^2} I - \tilde{f}m \right] \hat{v} = 0, \quad (11.17)$$

где I — единичная матрица порядка N .

Как и раньше, эта система однородных уравнений может иметь ненулевое решение, если только определитель квадратной матрицы равен нулю. Тогда частотное уравнение принимает вид

$$\left\| \frac{1}{\omega^2} I - \tilde{f}m \right\| = 0. \quad (11.18)$$

Корни этого уравнения определяют так же, как и для уравнения (11.6.) Аналогично вычисляют и формы колебаний для каждой предварительно вычисленной частоты. Существует только одно принци-

пильное отличие в решении этих задач — корни уравнения (11.18) представляют собой величины, обратные квадратам частот.

Отметим, что произведение матриц \tilde{m} в (11.18) не является в общем случае симметричной матрицей, даже если обе матрицы масс и податливостей симметричны. При решении задачи определения собственных чисел и векторов с помощью ЭВМ может возникнуть необходимость сохранить симметричность решаемой матрицы. Методика симметризации уравнений, решаемых в виде матрицы податливостей, рассмотрена в гл. 13.

11.4. ВЛИЯНИЕ ОСЕВЫХ СИЛ

11.4.1. Собственные колебания. Частоты и формы собственных колебаний сооружения при действии постоянных осевых нагрузок могут быть определены таким же методом, как для сооружения без учета осевых сил. В этом случае в уравнение колебаний необходимо включить геометрическую жесткость системы и уравнение (11.1) принимает вид

$$m\ddot{v} + kv - k_G v = m\ddot{\bar{v}} + \bar{k}\bar{v} = 0, \quad (11.19)$$

а частное уравнение

$$\|\bar{k} - \omega^2 m\| = 0. \quad (11.20)$$

Для определения частот и форм собственных колебаний необходимо только заменить матрицу упругой жесткости k матрицей общей жесткости \bar{k} , последующие вычисления выполняются аналогично ранее полученным выражениям. Для любой заданной схемы приложения осевых нагрузок матрица геометрической жесткости, а затем и матрица общей жесткости может быть определена численно. Влияние сжимающих осевых нагрузок приводит к уменьшению приведенной жесткости сооружения. При этом частоты собственных колебаний также уменьшаются, а формы собственных колебаний, как правило, изменяются.

11.4.2. Критическая нагрузка. Если частота собственных колебаний равна нулю, инерционные силы в уравнении (11.19) исчезают и уравнение колебаний принимает вид

$$kv - k_G v = 0. \quad (11.21)$$

Условие, при котором существует ненулевой вектор перемещений, в этом случае соответствует условию статической потери устойчивости. Другими словами, определение условия потери устойчивости сводится к приравнению нулю частоты собственных колебаний. Для определения критической нагрузки на сооружение целесообразно выразить геометрическую жесткость системы через произведение приведенной нагрузки на коэффициент осевой нагрузки λ_G . Тогда

$$k_G = \lambda_G k_{G0}, \quad (11.22)$$

в котором элементы матрицы k_{G0} определяются выражением

$$k_{Gij} = \int_0^L N_o(x) \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx. \quad (11.23)$$

В этом выражении $N_o(x)$ — относительная осевая сила в элементе. Нагрузка на сооружение принимается пропорциональной коэффициенту λ_G , а ее относительное распределение считается постоянным. Подставляя (11.22) в (11.21), получаем уравнение для собственных значений

$$[k - \lambda_G k_{G0}] \hat{v} = 0. \quad (11.24)$$

Нетривиальное решение этой системы уравнений существует только при условии

$$\|k - \lambda_G k_{G0}\| = 0, \quad (11.25)$$

которое характеризует условие потери устойчивости сооружения. Корни этого уравнения равны коэффициентам вектора осевой нагрузки λ_G , при которой происходит потеря устойчивости. Формы потери устойчивости можно определить аналогично формам собственных колебаний. В практических задачах интерес представляют только первая критическая нагрузка и первая форма потери устойчивости. Потеря устойчивости по более высоким формам представляет небольшой практический интерес, поскольку система потеряет несущую способность, когда нагрузка превысит самую низкую критическую силу.

11.4.3. Потеря устойчивости при гармоническом возмущении. Хотя результаты рассматриваемого в этом параграфе анализа имеют небольшое практическое значение, представляет, по крайней мере, академический интерес указать, что порядок критических сил для сооружения при гармоническом возбуждении определяется аналогично порядку частот собственных колебаний сооружения с учетом осевых нагрузок. Предположим, что система подвергается гармоническому воздействию с частотой $\bar{\omega}$, а вектор приложенных сил представлен в виде

$$p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t. \quad (11.26)$$

Уравнения колебаний недемпфированной системы в соответствии с (9.18) имеют вид

$$m\ddot{v} + kv - k_G v = p_0 \sin \bar{\omega} t. \quad (11.27)$$

Установившаяся реакция системы изменяется с частотой приложения внешних нагрузок

$$v(t) = \hat{v} \sin \bar{\omega} t, \quad (11.28a)$$

а ускорения равны:

$$\ddot{v}(t) = -\bar{\omega}^2 \hat{v} \sin \bar{\omega} t. \quad (11.28b)$$

Подставляя (11.28) в (11.27), после сокращения на $\sin \bar{\omega}t$ получаем:

$$-\bar{\omega}^2 m \hat{v} + k \hat{v} - k_G \hat{v} = p_0. \quad (11.29)$$

Символ k будет использован для обозначения динамической жесткости системы, которая равна:

$$\bar{k} \equiv k - \bar{\omega}^2 m. \quad (11.30a)$$

Если подставить это соотношение в (11.29) и выразить геометрическую жесткость через коэффициент нагрузки λ_G , то

$$[\bar{k} - \lambda_G k_{G0}] \hat{v} = p_0. \quad (11.30b)$$

Если амплитуды вектора приложенных сил в этом уравнении приближаются к нулю, то из сопоставления с условием (11.5) видно, что ненулевая реакция системы возможна в случае равенства нулю определителя квадратной матрицы. Соотношение

$$\|\bar{k} - \lambda_G k_{G0}\| = 0 \quad (11.31)$$

определяет условие потери устойчивости сооружения при гармоническом возбуждении.

Если приложенная нагрузка бесконечно мала, то уравнение (11.30b) принимает вид

$$[k - \omega^2 m - \lambda_G k_{G0}] \hat{v} = 0. \quad (11.32)$$

Отсюда видно, что этому условию будет удовлетворять бесконечное множество сочетаний критических нагрузок, характеризуемых коэффициентом λ_G , и частот ω^2 . Для любой критической нагрузки, определяемой величиной λ_G , с помощью (11.32) может быть найдена соответствующая частота собственных колебаний. Аналогично для любой частоты ω^2 соответствующая критическая нагрузка определяется зависимостью (11.31). Интересно отметить, что условие «потери устойчивости» при нулевых осевых нагрузках совпадает по определению с частотой собственных колебаний ненагруженной системы.

11.5. УСЛОВИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

11.5.1. Основные условия. Формы собственных колебаний φ_n обладают особыми свойствами, которые имеют большое значение в динамике сооружений. Эти свойства, которые называются условиями ортогональности, могут быть получены с использованием правила Бетти. Рассмотрим, например, две разные формы собственных колебаний конструкции, как показано на рис. 11.3. Для удобства балка рассматривается как система с сосредоточенными массами. Однако последующий анализ в равной мере применим к моделям с распределенными массами.

Уравнение движения (11.4) при свободных колебаниях системы может быть записано в форме

$$k \hat{v}_n = \omega_n^2 m \hat{v}_n, \quad (11.33)$$

где правая часть представляет собой вектор приложенных инерционных нагрузок $-f_I$, а левая часть — вектор упругих восстанавливающих сил f_S .

Таким образом, собственные колебания могут рассматриваться как изменение прогибов, вызванных инерционными силами, действующими подобно внешним приложенным нагрузкам (см. рис. 11.3). Тогда две формы собственных колебаний, показанные на рисунке,

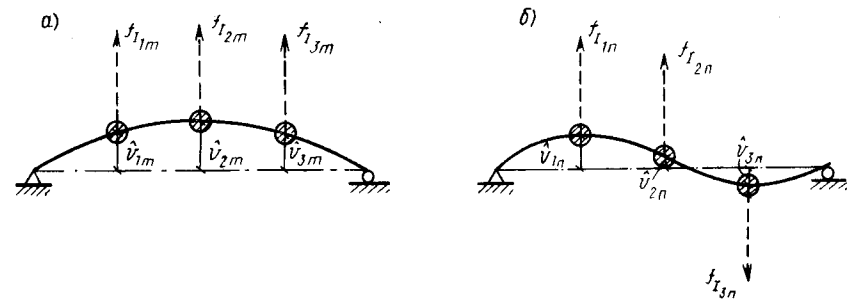


Рис. 11.3. Формы колебаний и инерционные силы
а — m -я форма; б — n -я форма

характеризуют две различные системы приложенных сил и вызываемые ими перемещения. Согласно правилу Бетти, можно записать

$$-f_{Im}^T \hat{v}_n = -f_{In}^T \hat{v}_m.$$

Подставляя выражение для сил инерции в уравнение (11.33), получим:

$$\omega_m^2 \hat{v}_m^T m \hat{v}_n = \omega_n^2 \hat{v}_n^T m \hat{v}_m, \quad (11.34)$$

где транспонирование произведения матриц выполнено с учетом симметричной матрицы m .

Замечая, что произведения матриц в (11.34) есть скалярные величины и могут быть транспонированы произвольно, можно записать это уравнение в виде

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \hat{v}_m^T m \hat{v}_n = 0. \quad (11.35)$$

С учетом условия, что две частоты собственных колебаний отличны друг от друга, получаем первое условие ортогональности

$$\hat{v}_m^T m \hat{v}_n = 0, \quad \omega_m \neq \omega_n. \quad (11.36)$$

Второе условие ортогональности может быть получено непосредственно из первого путем умножения слева выражения (11.33) на \hat{v}_m^T . Тогда

$$\hat{v}_m^T k \hat{v}_n = \omega_n^2 \hat{v}_m^T m \hat{v}_n.$$

Если соотношение (11.36) применить к правой части уравнения, то очевидно, что

$$\hat{v}_m^T k \hat{v}_n = 0, \quad \omega_m \neq \omega_n. \quad (11.37)$$

Это условие показывает, что формы колебаний ортогональны по отношению как к матрице жесткостей, так и к матрице масс.

В общем случае условие ортогональности удобно записать не для произвольных амплитуд \hat{v}_n , а для безразмерных векторов форм колебаний φ_n . Выражения (11.36) и (11.37) в равной мере справедливы, если их поделить на произвольные перемещения. Тогда условие ортогональности принимает вид:

$$\varphi_m^T m \varphi_n = 0, \quad m \neq n; \quad (11.38a)$$

$$\varphi_m^T k \varphi_n = 0, \quad m \neq n. \quad (11.38б)$$

Для систем, которые не имеют ни одной пары совпадающих частот собственных колебаний, условие ортогональности применимо к любым двум различным формам, как показано в условиях (11.38). Они не применимы к двум формам колебаний с совпадающими частотами.

11.5.2. Дополнительные соотношения. Дополнительные соотношения ортогональности могут быть получены последовательным перемножением уравнения (11.33). Для получения результатов в виде векторов форм собственных колебаний удобно разделить обе части уравнения (11.33) на произвольную амплитуду, что приводит к эквивалентному выражению

$$k \varphi_n = \omega_n^2 m \varphi_n. \quad (11.39)$$

Умножая его слева на $\varphi_m^T k m^{-1}$, получаем:

$$\varphi_m^T k m^{-1} k \varphi_n = \omega_n^2 \varphi_m^T k \varphi_n,$$

откуда с использованием (11.38б)

$$\varphi_m^T k m^{-1} k \varphi_n = 0. \quad (11.40)$$

Умножая уравнения (11.39) слева на $\varphi_m^T k m^{-1} k m^{-1}$, получаем:

$$\varphi_m^T k m^{-1} k m^{-1} k \varphi_n = \omega_n^2 \varphi_m^T k m^{-1} k \varphi_n,$$

откуда с использованием (11.40)

$$\varphi_m^T k m^{-1} k m^{-1} k \varphi_n = 0. \quad (11.41)$$

Аналогично может быть получено любое число ортогональных соотношений подобного типа.

Первое из соотношений второго типа может быть получено умножением слева уравнения (11.39) на $(1/\omega_n^2) \varphi_m^T m \tilde{f}$, откуда

$$\frac{1}{\omega_n^2} \varphi_m^T m \varphi_n = \varphi_m^T m \tilde{f} \varphi_n,$$

и после использования (12.38a)

$$\varphi_m^T m \tilde{f} m \varphi_n = 0. \quad (11.42)$$

Умножение слева уравнения (11.39) на $\frac{1}{\omega_n^2} \varphi_m^T m \tilde{f} m \tilde{f}$ дает

$$\frac{1}{\omega_n^2} \varphi_m^T m \tilde{f} m \varphi_n = \varphi_m^T m \tilde{f} m \tilde{f} m \varphi_n = 0. \quad (11.43)$$

Указанные соотношения могут повторяться бесконечное множество раз с помощью аналогичных операций.

Оба полных условия ортогональности, включая два основных условия, могут быть записаны в компактной форме

$$\varphi_m^T m [m^{-1} k]^b \varphi_n = 0, \quad -\infty < b < \infty. \quad (11.44)$$

Два основных условия (11.38a) и (11.38б) определяются показателями $b = 0$ и $b = +1$ в условии (11.44) соответственно.

11.5.3. Нормирование. Ранее отмечалось, что амплитуды собственных векторов, получаемые из решения задачи о собственных значениях, произвольны. Любая амплитуда удовлетворяет основному частотному уравнению (11.4), и только формы деформаций однозначно определены. В рассмотренном ранее анализе амплитуда одной степени свободы (по существу первой) принималась равной единице, а другие перемещения определялись по отношению к этой величине. Такой процесс называется *нормированием* собственных векторов по отношению к определенной координате.

Часто применяются другие методы нормирования. Например, во многих вычислительных программах формы нормируются не по отношению к любой произвольной координате, а по отношению к максимальной величине перемещения. Поэтому максимальная величина в каждом модальном векторе равна единице, что приводит к удобным числам для последующих расчетов. Методика нормирования, наиболее часто используемая в программах динамического анализа на ЭВМ, включает также выбор каждой модальной амплитуды по отношению к амплитуде $\hat{\varphi}_n$, удовлетворяющей условию

$$\hat{\varphi}_n^T m \hat{\varphi}_n = 1. \quad (11.45)$$

Это может выполняться вычислением скалярной величины

$$\hat{v}_n^T m \hat{v}_n = \hat{M}_n, \quad (11.46)$$

где \hat{v}_n — произвольно определенная модальная амплитуда.

Тогда, вычисляя нормированные формы колебаний, получаем:

$$\hat{\varphi}_n = \hat{v}_n \hat{M}_n^{-1/2}. \quad (11.47)$$

Можно показать, что это дает желаемый результат простой подстановкой указанного выражения.

Применяя указанный метод нормирования с учетом условий ортогональности по отношению к матрице масс (11.38а), получаем в результате

$$\Phi^T m \Phi = I, \quad (11.48)$$

где Φ — полная система N нормированных форм колебаний; I — единичная матрица порядка $N \times N$.

Формы колебаний, нормированные таким образом, называются *ортонормированными* по отношению к матрице масс. Хотя применение ортонормированных форм колебаний удобно при разработке программ для динамического анализа сооружений с использованием ЭВМ, оно не дает особых преимуществ при счете с применением логарифмической линейки. По этой причине в данной работе не предполагается рассматривать специальные методы нормирования.

Пример 11.3. Свойства ортогональности форм колебаний и методика нормирования будут рассмотрены для форм колебаний, определенных в примере 11.2. Коэффициенты нормирования, полученные для этих форм с помощью (11.46), для системы с сосредоточенными массами равны: $\hat{M}_n = \sum_{i=1}^3 \Phi_{in}^2 m_i$, и их величины $\hat{M}_1 = 1,801$; $\hat{M}_2 = 2,455$; $\hat{M}_3 = 23,1$. После деления соответствующих форм колебаний на квадратные корни из этих коэффициентов получаем матрицу ортонормированных форм колебаний

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,745 & 0,638 & 0,208 \\ 0,480 & -0,384 & -0,535 \\ 0,223 & -0,432 & 0,514 \end{bmatrix}.$$

Наконец, после перемножения (11.48) получаем:

$$\Phi^T m \Phi = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,006 & 0,000 \\ 0,006 & 1,000 & -0,003 \\ 0,000 & -0,003 & 0,998 \end{bmatrix}.$$

Небольшое отличие полученного результата от ожидаемой единичной матрицы объясняется накоплением ошибок при вычислениях форм колебаний и произведения матриц, так как все расчеты выполнялись с помощью логарифмической линейки.

ГЛАВА 12

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

12.1. НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

При анализе произвольной системы с N степенями свободы деформированное состояние определялось N компонентами вектора перемещений v . Однако при динамическом анализе упругих систем значительно удобнее принимать перемещения в виде собственных векторов (форм собственных колебаний). Эти векторы содержат N независимых перемещений, амплитуды которых могут рассматриваться как обобщенные координаты, характеризующие любую форму перемещений. Таким образом, формы собственных колебаний

играют ту же роль, что и тригонометрические функции в рядах Фурье. Они удобны по тем же причинам: в связи с ортогональностью их характеристик и поскольку они настолько хорошо характеризуют перемещения, что приемлемое приближение может быть получено с помощью нескольких членов.

Рассмотрим в качестве примера консольную балку на рис.12.1, для которой форма изгиба определяется координатами перемещений в трех уровнях. Любой вектор перемещений системы v может быть получен суперпозицией приемлемых амплитуд трех форм собственных колебаний (см. рис. 12.1). Для произвольной составляющей фор-

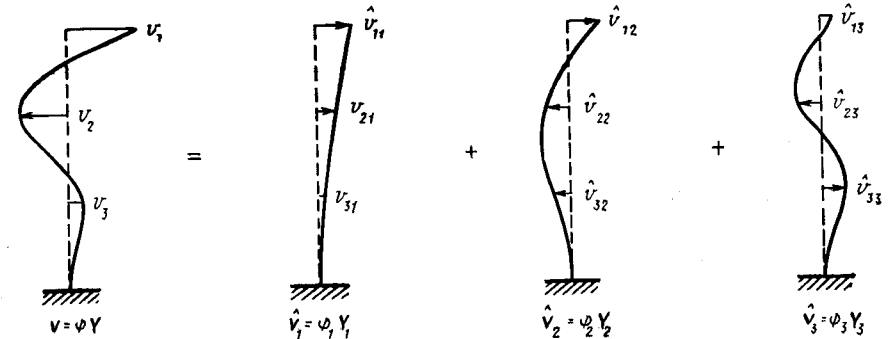


Рис. 12.1. Представление перемещений в виде суммы модальных составляющих

мы колебаний (модальной компоненты) \hat{v}_n перемещения определяются собственным вектором Φ_n , умноженным на амплитуду колебаний по данной форме (модальную амплитуду) Y_n , т. е.

$$\hat{v}_n = \Phi_n Y_n. \quad (12.1)$$

Тогда общее перемещение равно сумме модальных компонент

$$v = \Phi_1 Y_1 + \Phi_2 Y_2 + \dots + \Phi_N Y_N = \sum_{n=1}^N \Phi_n Y_n$$

или в матричной форме

$$v = \Phi Y. \quad (12.2)$$

Это выражение свидетельствует о том, что матрица форм собственных колебаний Φ служит для преобразования от обобщенных координат Y к геометрическим координатам v . Такие обобщенные координаты амплитуд колебаний называются *нормальными (главными)* координатами системы.

Поскольку матрица форм колебаний Φ для системы с N степенями свободы содержит N независимых собственных векторов (модальных векторов), она является неособенной и может быть обращена. Таким образом, всегда можно решить (12.2) непосредственно в форме амплитуд нормальных координат Y , связанных с любым заданным вектором перемещений v . Однако в соответствии с усло-

внями ортогональности не нужно при определении Y решать любую совместную систему уравнений. Для нахождения произвольной координаты Y_n [уравнение (12.2)] следует умножить на произведение транспонированного модального вектора и матрицы масс $\Phi_n^T m$, откуда

$$\Phi_n^T m v = \Phi_n^T m \Phi Y. \quad (12.3)$$

Правая часть этого уравнения может быть представлена в развернутой форме

$$\Phi_n^T m \Phi Y = \Phi_n^T m \Phi_1 Y_1 + \Phi_n^T m \Phi_2 Y_2 + \dots + \Phi_n^T m \Phi_N Y_N. \quad (12.4)$$

Все члены этого ряда, кроме содержащего Φ_n , исчезают в соответствии с условием ортогональности матрице масс. Переноса этот член в правую часть уравнения (12.3), получим:

$$\Phi_n^T m v = \Phi_n^T m \Phi_n Y_n,$$

из которого

$$Y_n = \frac{\Phi_n^T m v}{\Phi_n^T m \Phi_n}. \quad (12.5)$$

Очевидно, что каждая из нормальных координат может быть представлена в такой форме. Следует еще доказать эквивалентность изложенного метода расчета стандартным выражениям типа (4.2) при определении коэффициентов ряда Фурье.

12.2. НЕСВЯЗАННЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ (БЕЗ УЧЕТА ЗАТУХАНИЯ)

Свойства ортогональности нормальных координат можно теперь использовать для упрощения уравнений колебаний систем со многими степенями свободы. В общем виде эти уравнения определяются выражениями (9.13) [или эквивалентными им (9.19) при наличии осевых сил]. Для недемпфированной системы они принимают вид

$$m \ddot{v} + k v = p(t). \quad (12.6)$$

Подставляя уравнение (12.2) и его вторую производную $\ddot{v} = \Phi \ddot{Y}$ (заметим, что формы собственных колебаний не изменяются во времени) в (12.6), получаем:

$$m \Phi \ddot{Y} + k \Phi Y = p(t). \quad (12.7)$$

Если выражение (12.7) умножить слева на транспонированный вектор n -й формы колебаний Φ_n^T , то

$$\Phi_n^T m \Phi \ddot{Y} + \Phi_n^T k \Phi Y = \Phi_n^T p(t). \quad (12.8)$$

Если два слагаемых в левой части этого выражения представить в развернутой форме (12.4), то все члены, за исключением n -й формы, в соответствии с условиями ортогональности исчезают, и

$$\Phi_n^T m \Phi_n \dot{Y}_n + \Phi_n^T k \Phi_n Y_n = \Phi_n^T p(t). \quad (12.9)$$

Теперь введем новые обозначения:

$$M_n \equiv \Phi_n^T m \Phi_n, \quad (12.10a)$$

$$K_n \equiv \Phi_n^T k \Phi_n, \quad (12.10б)$$

$$P_n(t) \equiv \Phi_n^T p(t), \quad (12.10в)$$

которые соответственно называются обобщенной массой, обобщенной жесткостью и обобщенной нагрузкой для n -й формы в нормальных координатах. С учетом этих обозначений уравнение (12.9) принимает вид

$$M_n \dot{Y}_n + K_n Y_n = P_n(t); \quad (12.11)$$

оно представляет собой уравнение колебаний системы с одной степенью свободы для n -й формы. Если обе части уравнения (11.39) $k \Phi_n = \omega_n^2 m \Phi_n$ умножить на Φ_n^T , то обобщенная жесткость для n -й формы будет представлена произведением обобщенной массы на квадрат частоты собственных колебаний

$$\Phi_n^T k \Phi_n = \omega_n^2 \Phi_n^T m \Phi_n$$

или

$$K_n = \omega_n^2 M_n. \quad (12.10г)$$

Прописные буквы используются для обозначения характеристик в нормальных координатах.

Рассмотренная методика может быть применена для получения независимого уравнения колебаний системы с одной степенью свободы для каждой формы собственных колебаний сооружения. Таким образом использование нормальных координат позволяет преобразовать уравнение колебаний от системы из N совместных дифференциальных уравнений, связанных недиагональными членами в матрицах масс и жесткостей, к системе из N независимых уравнений в нормальных координатах. Следовательно, динамическая реакция может быть определена с помощью отдельного вычисления параметров реакции для каждой нормальной (модальной) координаты и последующего их объединения [см. соотношение (12.2)] для выражения реакции в первоначальных координатах. Такой метод называется *методом сложения форм колебаний*.

12.3. НЕСВЯЗАННЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ (С УЧЕТОМ ЗАТУХАНИЯ)

12.3.1. Вывод уравнений равновесия. Теперь представляет интерес проверить, при каких условиях преобразование к нормальным координатам будет справедливо для уравнений колебаний демп-

пфирированной системы [см. (9.13)]

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t).$$

Подставляя выражение (12.2) для нормальных координат и его производные в это уравнение, а также умножая его слева на транспонированный вектор φ_n^T для n -й формы колебаний, получим:

$$\varphi_n^T m \Phi \ddot{Y} + \varphi_n^T c \Phi \dot{Y} + \varphi_n^T k \Phi Y = \varphi_n^T p(t). \quad (12.12)$$

Ранее отмечалось, что условия ортогональности

$$\varphi_m^T m \varphi_n = 0, \quad \varphi_m^T k \varphi_n = 0, \quad m \neq n$$

приводят к тому, что все члены (12.12), за исключением членов для n -й формы, в выражениях масс и жесткостей исчезают. Аналогичное сокращение справедливо для компонент затухания, если *предположить*, что соответствующие условия ортогональности применимы и к матрице затухания, т. е. принимаем, что

$$\varphi_m^T c \varphi_n = 0, \quad m \neq n. \quad (12.13)$$

В этом случае уравнение (12.12) может быть представлено в виде

$$M_n \dot{Y}_n + C_n Y_n + K_n Y_n = P_n(t) \quad (12.14a)$$

и, следовательно,

$$\dot{Y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{P_n(t)}{M_n}, \quad (12.14b)$$

где

$$\begin{aligned} M_n &= \varphi_n^T m \varphi_n; \quad C_n = \varphi_n^T c \varphi_n = 2\xi_n \omega_n M_n; \\ K_n &= \varphi_n^T k \varphi_n = \omega_n^2 M_n; \\ P_n(t) &= \varphi_n^T p(t). \end{aligned} \quad (12.15)$$

Выражения для обобщенных масс, перемещений и нагрузок демпфированной системы в нормальных координатах совпадают с соответствующими выражениями (12.10) для системы без учета затухания. В эквивалентной форме представлено и обобщенное затухание по n -й форме. Только правая часть этого выражения содержит определение параметра затухания ξ_n по n -й форме, так как другие величины в выражениях (12.15) уже известны. Как ранее отмечалось, определять затухание с помощью параметров для каждой формы колебаний более удобно и физически оправданно, чем с помощью матрицы коэффициентов затухания c .

12.3.2. Условия ортогональности сил затухания. В изложенном выводе уравнений колебаний в нормальных координатах предполагалось, что преобразование к нормальным координатам позволяет разделить силы затухания таким же образом, как разделяются силы инерции и упругости. Тогда формы собственных колебаний демпфи-

рованной системы совпадает с формами колебаний системы без затухания. Теперь полезно рассмотреть условия, при которых указанное разделение возможно, т. е. форму матрицы затухания, для которой справедливо соотношение (12.13).

Релей показал, что матрица затухания в форме

$$c = a_0 m + a_1 k, \quad (12.16)$$

где a_0 и a_1 — произвольные коэффициенты пропорциональности, удовлетворяет условиям ортогональности (12.13). Это легко показать, применив операцию ортогонализации к обеим частям выражения (12.16). Таким образом, матрица сил затухания, пропорциональная матрице масс или матрице жесткостей, позволяет разделить уравнения колебаний. Как показано ранее, неограниченное число матриц, образованных из матриц масс и жесткостей, также удовлетворяют условию ортогональности [см. (11.42)]. Таким образом, матрица затухания может представлять собой комбинацию указанных матриц. Тогда в общей форме ортогональная матрица затухания может иметь вид

$$c = m \sum_b a_b [m^{-1} k]^b \equiv \sum_b c_b. \quad (12.17)$$

количество слагаемых в котором может выбираться произвольно.

Затухание по Релею (12.16), безусловно, входит в выражение (12.17). Включением дополнительных членов в это выражение можно достичь большей степени точности при определении параметров затухания по разным формам в соответствии с матрицей затухания. С помощью этой матрицы затухания можно определить коэффициенты затухания, необходимые для получения несвязанной системы уравнений с любыми желаемыми параметрами затухания при произвольном числе форм колебаний. Для каждой формы n обобщенное затухание определяется соотношением (12.15):

$$C_n = \varphi_n^T c \varphi_n = 2\xi_n \omega_n M_n.$$

Однако если c определяется выражением (12.17), вклад слагаемого b в обобщенное затухание равен:

$$C_{nb} = \varphi_n^T c_b \varphi_n = a_b \varphi_n^T m [m^{-1} k]^b \varphi_n. \quad (12.18)$$

Если теперь обе части уравнения (11.39) $k\varphi_n = \omega_n^2 m\varphi_n$ умножить слева на $\varphi_n^T k m^{-1}$, то

$$\varphi_n^T k m^{-1} k \varphi_n = \omega_n^2 \varphi_n^T k \varphi_n = \omega_n^4 M_n. \quad (12.19)$$

Аналогично можно показать, что

$$\varphi_n^T m [m^{-1} k]^b \varphi_n = \omega_n^{2b} M_n \quad (12.20)$$

и, следовательно,

$$C_{nb} = a_b \omega_n^{2b} M_n. \quad (12.21)$$

С учетом этого матрица затухания для любой n -й формы колебаний

$$C_n = \sum_b C_{nb} = \sum_b a_b \omega_n^{2b} M_n = 2\xi_n \omega_n M_n, \quad (12.22)$$

откуда

$$\xi_n = \frac{1}{2\omega_n} \sum_b a_b \omega_n^{2b}. \quad (12.23)$$

Выражение (12.23) определяет способ вычисления постоянных a_b для заданного любого параметра затухания при произвольном числе форм колебаний. В ряд необходимо включать столько членов, сколько выбрано параметров затухания для разных форм колебаний. Постоянные определяются из совместного решения системы уравнений. Величина b может находиться в диапазоне $-\infty < b < \infty$, но на практике целесообразно выделить величины, возможно близкие к нулю. Например, при определении коэффициентов для трех выбранных параметров затухания получаемые из (12.22) уравнения имеют вид

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^3} & \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_2^3} & \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 \\ \frac{1}{\omega_3^3} & \frac{1}{\omega_3} & \omega_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}. \quad (12.24)$$

В общем случае соответствующие выражения могут быть записаны в символической форме

$$\xi = 1/2 Qa, \quad (12.25)$$

где Q — квадратная матрица параметров модальных частот.

Уравнение (12.25) допускает решение относительно коэффициентов a

$$a = 2Q^{-1} \xi, \quad (12.26)$$

и, наконец, матрица затухания может быть получена с помощью выражения (12.17).

Интересно отметить [см. (12.23) или (12.24)], что когда матрица затухания пропорциональна матрице масс ($c = a_0 m$, т. е. $b = 0$), параметр затухания обратно пропорционален частоте колебаний. Тогда высшие формы колебаний будут иметь очень малое затухание. Аналогично, когда затухание пропорционально матрице жесткости ($c = a_1 k$, т. е. $b = 1$), параметр затухания прямо пропорционален частоте, и высшие формы колебаний будут сильно демпфированы.

Существует второй метод определения матрицы затухания в соответствии с заданной системой модальных параметров затухания. Сущность метода может быть рассмотрена при анализе полной диагональной матрицы обобщенных коэффициентов затухания, ко-

торые определяются умножением матрицы затухания слева и справа на матрицу форм колебаний

$$C = \Phi^T c \Phi = 2 \begin{bmatrix} \xi_1 \omega_1 M_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \xi_2 \omega_2 M_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \xi_3 \omega_3 M_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (12.27)$$

Из этого уравнения видно, что матрица затухания может быть получена умножением матрицы C слева и справа на матрицу, обратную матрице форм собственных колебаний, и транспонированную обратную матрицу

$$[\Phi^T]^{-1} C \Phi^{-1} = [\Phi^T]^{-1} \Phi^T c \Phi \Phi^{-1} = c. \quad (12.28)$$

Таким образом можно в соответствии с (12.27) определить матрицу обобщенных коэффициентов затухания C для любой системы модальных параметров затухания ξ_n , а затем матрицу затухания c в соответствии с (12.28).

На практике, однако, такой метод является не очень удобным, так как обращение матрицы форм собственных колебаний требует большого объема вычислений. Вместо этого удобно воспользоваться преимуществами условий ортогональности форм колебаний матрице масс. Диагональная матрица обобщенных масс получается в результате умножения матрицы масс слева и справа на полную матрицу коэффициентов форм колебаний

$$M = \Phi^T m \Phi. \quad (12.29)$$

После умножения слева на обращенную матрицу обобщенных масс получаем:

$$I = M^{-1} M = [M^{-1} \Phi^T m] \Phi = \Phi^{-1} \Phi, \quad (12.30)$$

откуда видно, что матрица форм колебаний обратна матрице

$$\Phi^{-1} = M^{-1} \Phi^T m. \quad (12.31)$$

Матрицу затухания получаем при подстановке (12.31) в (12.28)

$$c = [m \Phi M^{-1}] C [M^{-1} \Phi^T m]. \quad (12.32)$$

Поскольку $c_n = 2 \xi_n \omega_n M_n$, элементы диагональной матрицы, получаемой перемножением трех диагональных матриц (12.32), равны:

$$\xi_n = \frac{2\xi_n \omega_n}{M_n} \quad (12.33)$$

и выражение (12.32) записывается в виде

$$c = m \Phi \xi \Phi^T m, \quad (12.34)$$

где ξ — диагональная матрица из элементов ξ_n .

Для практических расчетов более удобно с учетом того, что каждый модальный параметр затухания характеризует независимый вклад в матрицу затухания, получить:

$$c_n = m \varphi_n \zeta_n \varphi_n^T m. \quad (12.35)$$

Тогда полная матрица затухания записывается как сумма модальных составляющих

$$c = \sum_{n=1}^N c_n = m \left[\sum_{n=1}^N \varphi_n \zeta_n \varphi_n^T \right] m, \quad (12.36)$$

и после подстановки выражения (12.33)

$$c = m \left[\sum_{n=1}^N \frac{2\zeta_n \omega_n}{M_n} \varphi_n \varphi_n^T \right] m. \quad (12.37)$$

В полученном выражении вклад каждой формы в матрицу затухания пропорционален параметру затухания каждой формы. Поэтому любая недемпфированная форма колебаний не оказывает влияния на матрицу затухания. Другими словами, в матрицу затухания включаются только те формы, которым свойственно затухание, а все другие формы являются недемпфированными.

Здесь уместно рассмотреть, при каких условиях целесообразно определять элементы матрицы затухания очень детально с помощью выражений (12.17) или (12.37). Как отмечалось, модальные параметры затухания являются наиболее эффективными показателями затухания в системе, когда анализ выполняется методом сложения форм колебаний. Однако детальное определение матрицы затухания необходимо при выполнении анализа динамической реакции каким-либо другим методом, например шаговым методом интегрирования уравнений колебаний неупругой системы.

12.3.3. Взаимосвязь параметров затухания. Как было сказано выше, когда матрица затуханий для сооружения представлена в форме, удовлетворяющей условиям ортогональности, преобразование к недемпфированным модальным координатам приводит к системе несвязанных уравнений. Поскольку реакция системы получается затем суперпозицией решений для систем с одной степенью свободы, это разделение представляет собой большое преимущество нормальных координат. Ранее отмечалось, что эти координаты имеют другое не менее важное преимущество: наибольшее значение динамической реакции часто определяется модальными координатами с самыми низкими частотами, что позволяет достичь удовлетворительной аппроксимации реакции при значительном сокращении числа координат.

Когда динамическая реакция состоит только из нескольких низких форм колебаний, очевидно преимущество перехода к нормальным координатам даже в том случае, если системы имеют матрицы затуханий, не удовлетворяющие условиям ортогональности.

В этом случае матрица обобщенных затуханий не будет диагональной, т. е. уравнения для форм колебаний будут связаны обобщенными силами затухания. Следовательно, реакция системы должна определяться не раздельным, а совместным интегрированием этих уравнений. Такое интегрирование может выполняться шаговыми методами (см. гл. 14), и поэтому выгоднее интегрировать несколько связанных уравнений в обобщенных координатах, а не первоначальную систему связанных уравнений.

Альтернативными были бы решения сложной задачи о собственных значениях (что является результатом наличия матрицы затухания общего типа) и последующее получение системы несвязанных уравнений путем преобразования демпфированных форм колебаний¹. Однако вычисление форм колебаний с учетом затухания требует значительно большего объема, чем решение задачи о собственных значениях недемпфированной системы, так как для системы с N степенями свободы необходимо решение $2N$ уравнений для определения относительных амплитуд и фазовых углов для каждой степени свободы. По этой причине, как правило, более эффективно использовать недемпфированные формы колебаний.

12.4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ МЕТОДА СЛОЖЕНИЯ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ

Преобразование к нормальным координатам, которое позволяет привести N связанных уравнений колебаний системы со многими степенями свободы к системе из N несвязанных уравнений, составляет основу метода сложения форм колебаний в динамике сооружений. Этот метод можно использовать для определения динамической реакции любой упругой системы, перемещения которой выражены N дискретными координатами и затухание которой определяется модальными параметрами затухания. Методика вычислений состоит из следующих этапов.

Этап 1. Уравнения колебаний. Для этого класса систем уравнения колебаний могут быть представлены в виде [см. уравнение (9.13)]

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t).$$

Этап 2. Анализ частот и форм собственных колебаний. Для свободных колебаний без учета затухания указанное матричное уравнение может быть преобразовано в уравнение для собственных значений [см. (11.4)]

$$[k - \omega^2 m] \hat{v} = 0,$$

из которого определяются матрицы форм колебания Φ и вектор частот ω .

¹ Такой подход рассмотрен в работе Hurty W. C., Rubinstein M. F. Dynamics of Structures. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. Y., 1964, chapter 9.

Этап 3. Обобщенные массы и нагрузки. С учетом вектора Φ_n для каждой формы колебаний определяются обобщенная масса и обобщенная нагрузка [см. выражение (12.10)]:

$$M_n = \Phi_n^T m \Phi_n; P_n(t) = \Phi_n^T p(t).$$

Этап 4. Несвязанные уравнения колебаний. Уравнение колебаний для каждой формы может быть теперь записано с помощью обобщенных массы и нагрузки, модальной частоты ω_n и выбранной величины параметра модального затухания ξ_n [см. выражение (12.146)]:

$$\ddot{Y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{P_n(t)}{M_n}. \quad (12.38)$$

Этап 5. Реакция системы для формы колебаний. После этапа 4 для каждой формы собственных колебаний получается N независимых уравнений движения. Эти уравнения для систем с одной степенью свободы могут быть решены любым подходящим методом в зависимости от вида нагружения. Реакция общего вида для каждой формы определяется интегралом Дюамеля [см. выражение (6.14)]:

$$Y_n(t) = \frac{1}{M_n \omega_{Dn}} \int_0^t P_n(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_{Dn} (t-\tau) d\tau. \quad (12.39)$$

Этап 6. Анализ свободных колебаний по разным формам. Выражение (6.14) применимо для системы, находящейся в состоянии покоя при $t = 0$. Если начальная скорость и перемещение не равны нулю, для каждой формы к интегралу Дюамеля необходимо прибавить реакцию при свободных колебаниях. Реакция при свободных колебаниях демпфированной системы общего вида для каждой формы колебаний определяется выражением [см. (2.26)]:

$$Y_n(t) = e^{-\xi_n \omega_n t} \left[\frac{\dot{Y}_n(0) + Y_n(0) \xi_n \omega_n}{\omega_{Dn}} \sin \omega_{Dn} t + Y_n(0) \cos \omega_{Dn} t \right], \quad (12.40)$$

где $Y_n(0)$ и $\dot{Y}_n(0)$ — соответственно начальное перемещение и начальная скорость для n -й формы колебаний.

Эти величины могут быть получены из принятого начального перемещения $v(0)$ и начальной скорости $\dot{v}(0)$, выраженных в первоначальных координатах, как для любой модальной компоненты [см. (12.5)]:

$$Y_n(0) = \frac{\Phi_n^T m v(0)}{M_n}; \quad (12.41)$$

$$\dot{Y}_n(0) = \frac{\Phi_n^T m \dot{v}(0)}{M_n}. \quad (12.42)$$

Этап 7. Перемещения реакции в первоначальных координатах. Если из уравнения (6.14) или уравнения (2.26) для каждой формы колебаний определена реакция системы $Y_n(t)$, перемещения в первоначальных координатах определяются преобразованием (12.2) нормальных координат

$$v(t) = \Phi Y(t).$$

Тогда (12.2) может быть представлено в виде

$$v(t) = \Phi_1 Y_1(t) + \Phi_2 Y_2(t) + \Phi_3 Y_3(t) + \dots,$$

что характеризует суперпозицию различных модальных составляющих. Этот метод называется *методом сложения форм колебаний*. Следует отметить, что для большинства схем нагружения доля различных форм колебаний будет наибольшей для самых низких частот и уменьшается для более высоких частот. Поэтому нет необходимости учитывать в процессе суперпозиции [см. уравнение (12.2)] все высшие формы колебаний. Число членов ряда может быть ограничено, когда реакция получена с требуемой степенью точности. Кроме того, следует помнить, что математическая идеализация любой сложной конструкции уже включает в себя меньшую надежность при определении высших форм колебаний. По этой причине также целесообразно ограничивать число форм колебаний, рассматриваемых при анализе динамической реакции.

Этап 8. Определение параметров упругих восстанавливающих сил. Процесс изменения перемещений системы можно рассматривать как основную характеристику ее реакции при динамической нагрузке. Как правило, другие параметры реакции, такие, как напряжения и усилия, в различных элементах конструкции могут быть вычислены по известным перемещениям. Например, силы упругости f_S , препятствующие деформациям сооружения, определяются с помощью выражения (9.6)

$$f_S(t) = kv(t) = k\Phi Y(t). \quad (12.43)$$

Другое выражение для упругих восстанавливающих сил может быть применено, когда частоты и формы свободных колебаний определены из решения задачи о собственных значениях в форме единичных перемещений [см. (11.17)]. Записывая выражение (12.43) в составляющих для разных форм колебаний, получаем:

$$f_S(t) = k\Phi_1 Y_1(t) + k\Phi_2 Y_2(t) + k\Phi_3 Y_3(t) + \dots$$

и, подставляя в него выражение (11.39),

$$f_S(t) = \omega_1^2 m\Phi_1 Y_1(t) + \omega_2^2 m\Phi_2 Y_2(t) + \omega_3^2 m\Phi_3 Y_3(t) + \dots,$$

в матричной форме имеем:

$$f_S(t) = m\Phi [\omega_n^2 Y_n(t)], \quad (12.44)$$

где $[\omega_n^2 Y_n(t)]$ — вектор модальных амплитуд, умноженных на квадраты соответствующих частот.

В (12.44) упругая восстанавливающая сила, связанная с каждым модальным компонентом, заменена эквивалентным выражением модальных сил инерции. Эквивалентность этих выражений вытекает из равновесия сил при свободных колебаниях [см. (12.29)]. Такая замена справедлива для любого момента времени и даже для случая статического анализа.

Поскольку в (12.44) каждая форма умножается на квадрат модальной частоты, очевидно, что высшие формы колебаний при определении сил оказывают большее влияние, чем при определении перемещений. Поэтому необходимо при нахождении с желаемой точностью упругих восстанавливающих сил учитывать большее число модальных составляющих, чем при определении перемещений.

Пример 12.1. Отдельные моменты метода суперпозиции форм колебаний будут показаны в примере расчета трехэтажной рамы, рассмотренной в примере 11.1 (см. рис. 11.1).

Для удобства динамические и физические характеристики системы приведены ниже:

$$m_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 2,0 \end{bmatrix} \text{ килофунт} \times \text{с}^2/\text{дюйм};$$

или

$$m = 0,178 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 2,0 \end{bmatrix} \text{ тс} \cdot \text{с}^2/\text{см};$$

$$k = 600 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ килофунт/дюйм}$$

или

$$k = 107 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ тс/см},$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 14,5 \\ 31,1 \\ 46,1 \end{bmatrix} \text{ рад/с},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1,000 & 1,000 & 1,000 \\ 0,644 & -0,601 & -2,57 \\ 0,300 & -0,676 & 2,47 \end{bmatrix}.$$

Теперь, полагая, что конструкция недемпфирована, определим свободные колебания системы при следующих начальных условиях:

$$v(t=0) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,4 \\ 0,3 \end{bmatrix} \text{ дюйм} = \begin{bmatrix} 1,27 \\ 1,01 \\ 0,76 \end{bmatrix} \text{ см};$$

$$\dot{v}(t=0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ дюйм/с} = \begin{bmatrix} 0 \\ 22,86 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ см/с}.$$

Модальные амплитуды координат, связанные с начальными перемещениями, выражены в форме уравнения (12.5). Записывая полный ряд уравнений в матричной форме, получаем выражение

$$Y(t=0) = M^{-1} \Phi^T m v(t=0)$$

[которое также можно было получить при объединении выражений (12.31) и (12.2)]. Из приведенных выше данных о массе и формах колебаний получаем матрицу обобщенных масс

$$M = \begin{bmatrix} 1,801 & 0 & 0 \\ 0 & 2,455 & 0 \\ 0 & 0 & 23,10 \end{bmatrix},$$

откуда видно, что эти члены являются такими же, как коэффициенты нормирования, вычисленные в примере 11.3. Умножением обратных величин этих членов на транспонированную матрицу форм колебаний и матрицу масс получаем:

$$M^{-1} \Phi^T m = \begin{bmatrix} 0,555 & 0,536 & 0,333 \\ 0,407 & -0,366 & -0,550 \\ 0,043 & -0,167 & 0,214 \end{bmatrix}.$$

Отсюда начальные модальные амплитуды координат выражаются в виде этого произведения матриц и заданных начальных перемещений

$$Y(t=0) = M^{-1} \Phi^T m \begin{cases} \begin{bmatrix} 1,27 \\ 1,01 \\ 0,76 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,503 \\ -0,274 \\ 0,048 \end{bmatrix} \text{ см}; \\ \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,4 \\ 0,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,592 \\ -0,108 \\ 0,019 \end{bmatrix} \text{ дюйм}, \end{cases}$$

а модальные скорости координат — умножением того же произведения на начальные скорости

$$\dot{Y}(t=0) = M^{-1} \Phi^T m \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 22,86 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,260 \\ -8,382 \\ -3,810 \end{bmatrix} \text{ см/с}; \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,83 \\ -3,30 \\ -1,50 \end{bmatrix} \text{ дюйм/с}. \end{cases}$$

Реакция при свободных колебаниях недемпфированной конструкции по каждой форме имеет вид

$$Y_n(t) = \frac{\dot{Y}_n(t=0)}{\omega_n} \sin \omega_n t + Y_n(t=0) \cos \omega_n t,$$

откуда, используя начальные условия для модальных координат, определенные ранее, и величины модальных частот, получаем:

$$\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ Y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0,332 \sin \omega_1 t \\ -0,106 \sin \omega_2 t \\ -0,033 \sin \omega_3 t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,592 \cos \omega_1 t \\ -0,108 \cos \omega_2 t \\ 0,019 \cos \omega_3 t \end{bmatrix} \text{ (дюймы)} \\ \begin{bmatrix} 0,846 \sin \omega_1 t \\ -0,270 \sin \omega_2 t \\ -0,083 \sin \omega_3 t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,503 \cos \omega_1 t \\ -0,274 \cos \omega_2 t \\ 0,048 \cos \omega_3 t \end{bmatrix} \text{ (см)}. \end{cases}$$

Из этих результатов для отдельных форм колебаний можно с использованием зависимости $v(t) = \Phi Y(t)$ для принципа суперпозиции определить свободные колебания каждого этажа. Очевидно, что эти колебания включают долю каждой собственной формы колебаний.

Пример 12.2. В качестве еще одного примера сложения форм колебаний определим реакцию системы на рис. 11.1 под действием синусоидальной им-

пульсивной нагрузки от взрыва. Для этой цели нагрузку можно выразить в виде

$$\begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} (226,5 \text{ тс}) \cos \frac{\pi}{2t_1} t; \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} (500 \text{ килофунтов}) \cos \frac{\pi}{2t_1} t, \text{ где } t_1 = 0,02 \text{ с,} \\ -\frac{t_1}{2} < t < \frac{t_1}{2}. \end{cases}$$

Для этой кратковременной нагрузки можно принять, что реакция при каждой форме колебаний имеет вид свободных колебаний с амплитудой, определяемой спектром импульса на рис. 5.6. Таким образом, в течение начальной фазы реакции, когда затуханием можно пренебречь, реакция при каждой форме собственных колебаний имеет вид

$$Y_n(t) = D_n \frac{P_{0n}}{K_n} \sin \omega_n t, \quad (\text{а})$$

$$\text{где } K_n = M_n \omega_n^2; P_{0n} \begin{cases} = \varphi_n^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} 226,5 \text{ тс;} \\ = \varphi_n^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \times 500 \text{ килофунтов.} \end{cases}$$

Использование данных примера 12.1 дает:

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} 0,178 \begin{bmatrix} 1,80 & (14,5)^2 \\ 2,455 & (31,1)^2 \\ 23,10 & (46,1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67,5 \\ 422,2 \\ 8739,8 \end{bmatrix} \text{ тс/см;} \\ \begin{bmatrix} 1,80 & (14,5)^2 \\ 2,455 & (31,1)^2 \\ 23,10 & (46,1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 379 \\ 2372 \\ 49100 \end{bmatrix} \text{ килофунт/дюйм;} \end{cases} \quad (\text{б})$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} \varphi^T \begin{bmatrix} 226,5 \\ 453,0 \\ 453,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 654 \\ -352 \\ 181 \end{bmatrix} \text{ тс;} \\ \varphi^T \begin{bmatrix} 500 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1444 \\ -777 \\ 400 \end{bmatrix} \text{ килофунт.} \end{cases} \quad (\text{в})$$

Параметры относительной продолжительности импульса для форм колебаний этой конструкции

$$\begin{bmatrix} t_1/T_1 \\ t_1/T_2 \\ t_1/T_3 \end{bmatrix} = \frac{0,02}{2\pi} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,046 \\ 0,099 \\ 0,147 \end{bmatrix},$$

и с учетом данных рис. 5.6 получим следующие коэффициенты динамичности для разных форм:

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,18 \\ 0,39 \\ 0,57 \end{bmatrix}. \quad (\text{г})$$

Подставляя выражения (б) — (г) в соотношение (а), получим:

$$\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ Y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} (1,742) \sin 14,5t \\ (-0,325) \sin 31,1t \\ (0,012) \sin 46,1t \end{bmatrix} \text{ см;} \\ \begin{bmatrix} (0,686) \sin 14,5t \\ (-0,128) \sin 31,1t \\ (0,005) \sin 46,1t \end{bmatrix} \text{ дюйм.} \end{cases} \quad (\text{д})$$

Следует отметить, что колебания верхнего этажа будут простой суммой модальных перемещений, определяемых соотношением (д), так как для каждой формы колебаний собственный вектор содержит верхний элемент, равный единице. Тем не менее на уровне, например, второго этажа следует учитывать относительные перемещения при разных формах колебаний, т. е. выражение для сложения форм колебаний принимает вид

$$v_2(t) = \sum \varphi_{2n} Y_n(t) = \begin{cases} (1,123 \sin 14,5t + 0,195 \sin 31,1t - 0,033 \sin 46,1t) \text{ [см]} \\ (0,442 \sin 14,5t + 0,077 \sin 31,1t - 0,013 \sin 46,1t) \text{ [дюйм.]} \end{cases} \quad (\text{е})$$

Аналогично упругие силы при взрывной нагрузке определяются выражением (12.39) и для рассматриваемой системы с сосредоточенными массами на уровне второго этажа равны:

$$\begin{aligned} f_{S2}(t) &= \sum m_2 \omega_n^2 Y_n(t) \varphi_{2n} = \\ &= \begin{cases} (139 \sin 14,5t + 112 \sin 31,1t - 41 \sin 46,1t) \text{ [килофунт]}; \\ (62,96 \sin 14,5t + 50,73 \sin 31,1t - 18,57 \sin 46,1t) \text{ [тс]}. \end{cases} \quad (\text{ж}) \end{aligned}$$

Из сравнения выражений (е) и (ж) видно, что вклад высших форм колебаний имеет большее значение при определении упругих восстанавливающих сил, чем при определении перемещений.

Пример 12.3. Для конструкции, представленной в примере 11.1, следует определить полную матрицу затухания таким образом, чтобы параметр затухания по первой и третьей форме колебаний составлял 5% критического. Принимая затухание по методу Рейля, т. е. при b , равном нулю и единице [см. выражение (12.17)], можно вычислить коэффициенты пропорциональности a_0 и a_1 из общей формы (12.24) с учетом значений частот, приведенных в примере 12.1:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,05 \\ 0,05 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{14,5} & 14,5 \\ 1 & 46,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 0,165 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $c = 110 \text{ т} + 0,165 \text{ к}$ или, используя матрицы, приведенные в примере 12.1,

$$c = \begin{bmatrix} 209 & -99 & 0 \\ -99 & 462 & -198 \\ 0 & -198 & 715 \end{bmatrix} \text{ килофунт} \times \text{с/дюйм} \times (0,178 \text{ тс} \cdot \text{с/см}).$$

Теперь интересно определить, какой параметр затухания соответствует в этой матрице для второй формы колебаний. Используя второе соотношение

в матричном уравнении (12.24) (при $a_{-1} = 0$), получим:

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 31,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, подставляя ранее вычисленные величины a_0 и a_1 , получаем:

$$\xi_2 = 0,0433 = 4,33 \%$$

Следовательно, если учитываются только первый и третий параметры затухания, то параметр затухания для второй формы колебаний получается вполне приемлемым.

ГЛАВА 13

ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА КОЛЕБАНИЙ СООРУЖЕНИЙ

13.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Из изложенного материала видно, что динамическая реакция любой упругой системы легко определяется методом сложения форм колебаний после нахождения собственных частот и векторов. Более того, в большинстве практических случаев для выполнения расчетов с требуемой точностью необходимо учитывать сравнительно небольшое число форм колебаний. В связи с этим следует помнить, что динамические характеристики сооружения и нагрузки обычно известны весьма приближенно, поэтому модели и методы расчета должны обеспечивать сопоставимую степень точности. Тем не менее в прикладных задачах динамики сооружений рассматриваются различные модели — от весьма упрощенных математических моделей с несколькими степенями свободы, для которых требуется при приближенном динамическом анализе рассмотрение только одной или двух форм колебаний, до весьма сложных моделей метода МКЭ, включающего сотни и даже тысячи степеней свободы, из которых около 50 или 60 оказывают существенное влияние на параметры реакции. Для эффективного выполнения такого широкого диапазона аналитических преобразований, очевидно, необходимы самые различные методы анализа колебаний. В этой главе изложены некоторые из расчетных методов и подходов, эффективность которых подтверждена практикой расчетов.

Сначала будут рассмотрены два простых метода: *метод Стодолы* и *метод Хольцера*, которые с успехом применяются для динамического анализа систем, имеющих до десяти степеней свободы, с помощью настольных вычислительных машин. Поскольку решение определителя (11.6) весьма неэффективно для систем с числом степеней свободы больше 2—3, он мало используется в практических расчетах. Два этих метода основаны на итеративном процессе, но существенно различаются по принципу анализа. В методе Стодолы в качестве начального приближения принимается форма колебаний системы, которая последовательно уточняется до удовлетворительной аппроксимации истинной формы колебаний, а затем из уравнения движения определяется частота колебаний. В методике Хольцера начальное приближение задается в виде частоты колебаний, которая последовательно уточняется, пока не будут удовлетворены граничные условия; форма колебаний определяется в процессе удовлетворения граничных условий.

Остальная часть главы посвящена методам анализа больших систем, выполняемого с помощью ЭВМ. В принципе оба метода ручного счета могут быть запрограммированы для ЭВМ и использованы для анализа колебаний, но все же следует сначала детально изучить задачу расчета, перед тем как выбирать алгоритм исследования больших систем. Ниже обсуждаются некоторые при-

ципы и особенности анализа таких систем без рассмотрения деталей программирования на ЭВМ. Первый из обсуждаемых вопросов касается уменьшения числа динамических степеней свободы при расчете. Такое уменьшение — весьма эффективный прием при анализе больших систем. Затем рассматривается несколько фундаментальных принципов итерации матричных вычислений, которые используются при последующем обобщении метода Стодолы. Глава заканчивается кратким обзором задачи о представлении динамической матрицы в симметричной форме, что позволяет при анализе колебаний сооружений использовать эффективные программы для решения задачи о собственных значениях, имеющиеся в большинстве вычислительных центров. И, наконец, очень кратко рассматривается специальный класс колебательных систем, включающий системы из свободных тел без ограничений или с частичными ограничениями, исследование которых требует модификации стандартных методов анализа сооружений.

13.2. МЕТОД СТОДОЛЫ

13.2.1. Анализ основной формы колебаний. По-видимому, наилучшим методом для ручного счета является итеративный метод анализа, предложенный Стодолой. В современном виде метод формулируется в матричной форме и поэтому его также называют итерацией матриц. Метод основан на выражении (11.17), которое может быть представлено в виде

$$\frac{1}{\omega^2} \hat{v} = \tilde{f} m \hat{v}. \quad (13.1)$$

Произведение матриц $\tilde{f} m$ в этом уравнении характеризует все динамические свойства сооружения и называется *динамической матрицей D*, т. е.

$$D = \tilde{f} m. \quad (13.2)$$

Тогда (13.1) можно записать в виде

$$\frac{1}{\omega^2} \hat{v} = D \hat{v}. \quad (13.3)$$

Выражение (13.3) удовлетворяется только при векторе истинных форм колебаний. Таких форм N , и основная задача метода Стодолы заключается в их определении (или желаемого числа форм). Для начала вычислительного процесса необходимо задать пробный вектор $v_1^{(0)}$. Он должен характеризовать, по возможности, наилучшую оценку первой формы колебаний; амплитуду колебаний выбирают произвольно. Нижний индекс 1 используется для обозначения первой формы колебаний, а верхний индекс (0) показывает, что он относится к начальному приближению. Если эту форму подставить в правую часть выражения (13.3), то новая форма колебаний получается при умножении его слева на D :

$$\frac{1}{\omega^2} v_1^{(1)} = D v_1^{(0)}. \quad (13.4)$$

В принципе новая форма колебаний будет отличаться от первоначальной (если последняя не является истинной). Обозначим ее

верхним индексом (1). В действительности выражение (13.4) нельзя записать непосредственно, поскольку частота колебаний неизвестна. Поэтому обозначим через $\bar{v}_1^{(1)}$ произведение D на предполагаемую форму колебаний $v_1^{(0)}$, т. е.

$$\bar{v}_1^{(1)} = Dv_1^{(0)}, \quad (13.5)$$

где $\bar{v}_1^{(1)}$ пропорционален вычисленной форме, $1/\omega_1^2$ — неизвестный коэффициент пропорциональности.

Сравнивая выражения (13.4) и (13.5), получаем

$$\frac{1}{\omega_1^2} v_1^{(1)} = \bar{v}_1^{(1)}. \quad (13.6)$$

Если предположить, что вычисленная амплитуда одинакова с первоначально принятой амплитудой, то для определения частоты можно использовать выражение, эквивалентное (13.6). Рассматривая перемещения произвольной точки k , получаем:

$$\bar{v}_{k1}^{(1)} \approx \frac{1}{\omega_1^2} v_{k1}^{(0)} \quad (13.7)$$

или

$$\omega_1^2 \approx \frac{v_{k1}^{(0)}}{\bar{v}_{k1}^{(1)}}. \quad (13.8)$$

Если предполагаемая форма является истинной формой колебаний, то при рассмотрении отношения (13.8) для любой координаты системы получим ту же самую частоту колебаний.

В принципе вычисленная форма $\bar{v}_1^{(1)}$ будет отличаться от $v_1^{(0)}$, для каждой координаты перемещений также получим разные значения. В этом случае истинная частота первой формы собственных колебаний находится в интервале между максимальным и минимальным значениями, вычисленными с помощью (13.8):

$$\left(\frac{v_{k1}^{(0)}}{\bar{v}_{k1}^{(1)}} \right)_{\min} < \omega_1^2 < \left(\frac{v_{k1}^{(0)}}{\bar{v}_{k1}^{(1)}} \right)_{\max}. \quad (13.9)$$

Следовательно, лучшее приближение для частоты может быть получено осреднением результатов. Часто для лучшего осреднения распределение масс используется как весовой коэффициент. Тогда, записывая вектор, эквивалентный (13.7), и умножая обе его части слева на $(\bar{v}_1^{(1)})^T m$, получим для ω_1^2 следующее выражение:

$$\omega_1^2 \approx \frac{(\bar{v}_1^{(1)})^T m v_1^{(0)}}{(\bar{v}_1^{(1)})^T m \bar{v}_1^{(1)}}. \quad (13.10)$$

Выражение (13.10) характеризует наилучшее приближение для частоты колебаний, которое можно получить с помощью одного шага итерации при произвольно заданной форме $v_1^{(0)}$. Оно эквивалентно выражению (3.22) для улучшенного метода Релея. Следовательно, вычисленная форма $v_1^{(1)}$ является лучшим приближением для первой формы колебаний, чем первоначальное допущение $v_1^{(0)}$. Если

$v_1^{(1)}$ и производную форму $\bar{v}_1^{(2)}$ использовать в выражениях (13.8) или (13.10), то оценка получаемой частоты будет лучше, чем при первоначальном допущении. При последовательном повторении этого процесса можно улучшить оценку формы колебаний до любой желаемой степени точности. Другими словами, после s циклов

$$\bar{v}_1^{(s)} = \frac{1}{\omega_1^2} v_1^{(s-1)}, \quad (13.11)$$

где коэффициент пропорциональности между $\bar{v}_1^{(s)}$ и $v_1^{(s-1)}$ может быть определен с точностью до любого десятичного знака.

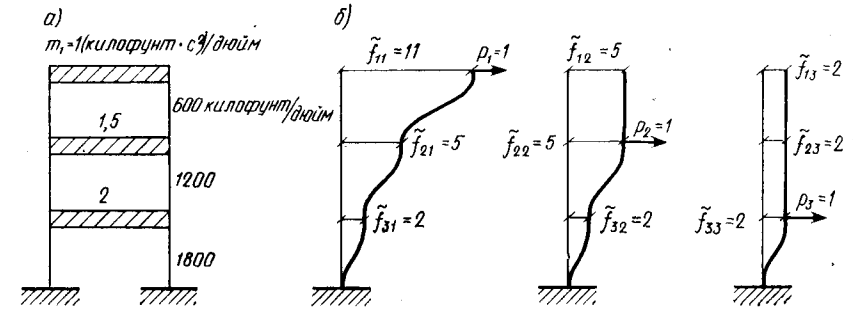


Рис. 13.1. Анализ рамы методом Стодолы
а — схема рамы; б — коэффициенты матрицы жесткости (1 килофунт·с²/дюйм = 0,178 тс·с²/см; 600 килофунт/дюйм = 107 тс/см)

Если результаты итеративного процесса сходятся к этой величине, истинная частота определяется равенством перемещений в любом уровне (желательно в уровне максимального перемещения):

$$\omega_1^2 = \frac{v_{k1}^{(s-1)}}{\bar{v}_{k1}^{(s)}}. \quad (13.12)$$

Когда найдена истинная форма колебаний, нет необходимости проводить осреднение результата в соответствии с (13.10).

Пример 13.1. Метод Стодолы будет применен при вычислении формы и частоты первой формы колебаний трехэтажного каркасного здания, показанного на рис. 11.1 и 13.1. Хотя матрицу единичных перемещений для этой системы можно легко получить обращением матрицы жесткости, определенной в указанном примере, мы вычислим ее здесь, чтобы продемонстрировать применение единичных сил вдоль каждой степени свободы. По определению прогибы при этих единичных силах, показанных на рис. 13.1, являются коэффициентами единичных перемещений. Тогда матрица единичных перемещений системы равна:

$$\tilde{f} = k^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{3600} \begin{bmatrix} 11 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ дюйм/килофунт} \\ \frac{5,607}{3600} \begin{bmatrix} 11 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ см/тс} \end{cases}$$

Умножая ее на матрицу масс, получаем динамическую матрицу

$$D = \tilde{f}m = \frac{1}{3600} \begin{bmatrix} 11 & 7,5 & 4 \\ 5 & 7,5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{с}^2.$$

Итеративный процесс в соответствии с (13.5) удобно выполнять в табличной форме. Сравнительно неудачно заданный пробный вектор $v_1^{(0)}$ может быть использован в этом примере, чтобы показать хорошую сходимость процесса

$$\frac{1}{3600} \begin{bmatrix} 11 & 7,5 & 4 \\ 5 & 7,5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1^{(1)} & v_1^{(1)} & \bar{v}_1^{(2)} & v_1^{(2)} & \bar{v}_1^{(3)} & v_1^{(3)} & \bar{v}_1^{(4)} & v_1^{(4)} & \bar{v}_1^{(5)} \\ 22,5 & 1,00 & 18,1 & 1,00 & 17,26 & 1,00 & 17,08 & 1,000 & 17,04 \\ 16,5 & 0,73 & 12,1 & 0,67 & 11,26 & 0,65 & 11,08 & 0,646 & 11,04 \\ 9 & 0,40 & 5,8 & 0,31 & 5,25 & 0,30 & 5,15 & 0,301 & 5,14 \end{bmatrix}$$

↑
Окончательная форма

Коэффициент 1/3600 не учитывался в этой стадии расчетов, поскольку важна только относительная форма колебаний. Формы колебаний нормированы путем деления на наибольший компонент перемещений [см. выражение (13.114)]. После четырех циклов вычислений форма колебаний получена с точностью, соответствующей точности расчетов на логарифмической линейке, и согласуется с результатами расчетов при раскрытии определителя (см. пример 11.2). Частоту первой формы колебаний можно определить из соотношения (13.12) для наибольшей компоненты перемещений или с учетом (13.117)

$$\omega_1^2 = \frac{v_1^{(4)}}{v_1^{(5)}} = \frac{1,000}{1/3600 \cdot 17,04} = 211; \quad \omega_1 = 14,5 \text{ рад/с}.$$

Отметим, что коэффициент 1/3600 теперь включен в расчет с величиной $\bar{v}_1^{(5)}$.

Интересно также определить диапазон частот после первого цикла вычислений [см. соотношение (13.9)]:

$$(\omega_1^2)_{\min} = \frac{v_1^{(0)}}{v_1^{(1)}} = \frac{3600}{22,5} = 160; \quad (\omega_1^2)_{\max} = \frac{v_1^{(0)}}{v_1^{(5)}} = \frac{3600}{9} = 400.$$

Следовательно, после первого цикла вычислений для указанной системы частота определена с недостаточной точностью (в связи со сравнительно неудачно заданным пробным вектором). Однако после первого цикла усреднения можно получить очень хорошее приближение согласно выражению (13.10):

$$\omega_1^2 = \frac{[22,5 \ 24,75 \ 18,00] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3600}{[22,5 \ 24,75 \ 18,00] \begin{bmatrix} 22,5 \\ 16,5 \\ 9,0 \end{bmatrix}} = \frac{65,25 \times 3600}{1077} = 218.$$

Указанный первый цикл приближения аналогичен улучшенному методу Рейля (R_{11}), рассмотренному в примере 8.3.

13.2.2. Доказательство сходимости. Итерационный процесс метода Стодолы должен сходиться к первой форме колебаний. Это можно в принципе показать, рассматривая его последовательные

этапы: вычисление инерционных нагрузок, вызываемых любой предполагаемой формой; определение прогибов от этих нагрузок; вычисление инерционных нагрузок, вызываемых вычисленными прогибами, и т. п. (рис. 13.2). В математической форме этот принцип имеет следующее объяснение.

Первоначально принятая форма колебаний выражена в нормальных координатах [см. уравнение (12.2)]:

$$v_1^{(0)} = \Phi Y^{(0)} = \Phi_1 Y_1^{(0)} + \Phi_2 Y_2^{(0)} + \Phi_3 Y_3^{(0)} + \dots, \quad (13.13)$$

в котором $Y_1^{(0)}$ — относительно большая величина при удачном выборе пробной формы. Силы инерции при этой форме колебаний с частотой первого тона равны [см. выражение (11.33)]:

$$f^{(0)} = \omega_1^2 m v_1^{(0)} = \omega_1^2 m \Phi Y^{(0)}. \quad (13.14)$$

Представляя $v_1^{(0)}$ в развернутой форме в соответствии с (13.13) и принимая $\omega_1^2 = \omega_n^2 (\omega_1/\omega_n)^2$, получаем:

$$f^{(0)} = m \left[\Phi_1 \omega_1^2 Y_1^{(0)} + \Phi_2 \omega_2^2 Y_2^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 + \Phi_3 \omega_3^2 Y_3^{(0)} \times \left(\frac{\omega_1}{\omega_3} \right)^2 + \dots \right]. \quad (13.15)$$

Прогибы при этих инерционных силах

$$v_1^{(1)} = \tilde{f} f^{(0)} = \tilde{f} m \left[\Phi_1 \omega_1^2 Y_1^{(0)} + \Phi_2 \omega_2^2 Y_2^{(0)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 + \dots \right],$$

или

$$v_1^{(1)} = \sum_{n=1}^N \tilde{f} m \Phi_n \omega_n^2 Y_n^{(1)}, \quad (13.16)$$

где

$$Y_n^{(1)} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^2 Y_n^{(0)}. \quad (13.17)$$

Замечая теперь из (11.39) (умноженного на \tilde{f}), что

$$\Phi_n = \omega_n^2 \tilde{f} m \Phi_n, \quad (13.18)$$

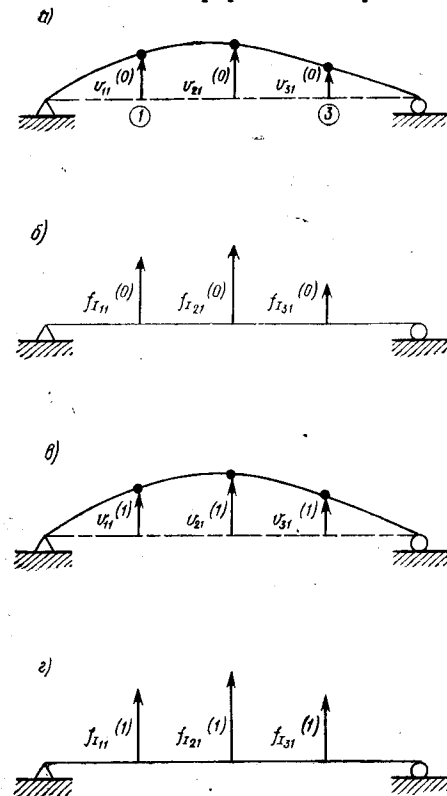


Рис. 13.2. Физическое объяснение итерационной процедуры метода Стодолы
а — предполагаемая форма $v_1^{(0)}$; б, г — результирующие инерционные силы соответственно $f^{(0)}$ и $f^{(1)}$; в — вычисленная форма $v_1^{(1)}$

можно записать выражение (13.16) в виде

$$v_1^{(1)} = \sum_{n=1}^N \varphi_n Y_n^{(1)} = \Phi Y^{(1)}, \quad (13.19)$$

которое по своей форме эквивалентно выражению (13.13), но представлено в относительных перемещениях.

Аналогичное преобразование для следующего цикла итерационного процесса определяет прогибы

$$v_1^{(2)} = \Phi Y^{(2)} = \Phi \left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^2 Y_n^{(1)} \right] = \Phi \left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^4 Y_n^0 \right]. \quad (13.20)$$

Продолжая этот процесс для s циклов, получаем:

$$v_1^{(s)} = \Phi Y^{(s)} = \Phi \left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^{2s} Y_n^0 \right] \approx \varphi_1 Y_1^0. \quad (13.21)$$

Последнее равенство в этом выражении вытекает из того, что коэффициент для первой формы колебаний значительно больше всех других коэффициентов, т. е.

$$1 \gg \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^{2s} \gg \left(\frac{\omega_1}{\omega_3} \right)^{2s} \gg \dots \quad (13.22)$$

Из выражения (13.22) видно, что вклад высших форм колебаний в $v_1^{(s)}$ может быть сделан сколь угодно малым путем выполнения достаточного числа циклов итераций. Тогда первая форма колебаний определяет получаемую форму. С учетом изложенного процесс должен сходиться к первой форме собственных колебаний, поскольку ее вклад в первоначально принятую форму $v_1^{(0)}$ не равен нулю.

13.2.3. Анализ второй формы колебаний. Доказательство сходимости итерационного процесса Стодолы к первой форме собственных колебаний содержит также указание, в какой форме эта методика может быть использована при вычислении более высоких форм колебаний. В развернутом виде выражение (13.21) равно:

$$v^{(s)} = \varphi_1 \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^{2s} Y_1^{(0)} + \varphi_2 \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^{2s} Y_2^{(0)} + \varphi_3 \left(\frac{\omega}{\omega_3} \right)^{2s} Y_3^{(0)} + \dots \quad (13.23)$$

Из этого выражения видно, что при $Y_1^{(0)} = 0$ процесс должен сходиться к второй форме колебаний. Если же $Y_1^{(0)}$ и $Y_2^{(0)} = 0$, то он сходится к третьей форме и т. д. Таким образом, для вычисления второй формы колебаний с помощью итерации матриц необходимо в качестве пробной формы принять $\tilde{v}_2^{(0)}$, которая не содержит компонент первой формы (знак тильда над символом обозначает форму колебаний, которая не содержит компонент первой формы).

Исключение компоненты первой формы из произвольно принятой второй формы колебаний обеспечивается условием ортогональности. Рассмотрим любую произвольно принятую вторую форму колебаний, выраженную в виде ее компонент:

$$v_2^{(0)} = \Phi Y^{(0)}. \quad (13.24)$$

Умножая слева обе части этого выражения на $\varphi_1^T m$, получаем:

$$\varphi_1^T m v_2^{(0)} = \varphi_1^T m \varphi_1 Y_1^{(0)} + \varphi_1^T m \varphi_2 Y_2^{(0)} + \dots \quad (13.25)$$

где правая часть выражения сводится к значению только первой формы колебаний в соответствии с условиями ортогональности.

Из выражения (13.25) можно определить амплитуду компоненты первой формы

$$Y_1^{(0)} = \frac{\varphi_1^T m v_2^{(0)}}{M_1}. \quad (13.26)$$

Таким образом, если эта компонента исключается из принятой формы колебаний, то оставшийся вектор можно назвать *усеченным*:

$$\tilde{v}_2^{(0)} = v_2^{(0)} - \varphi_1 Y_1^{(0)}. \quad (13.27)$$

Этот усеченный пробный вектор будет сходиться ко второй форме колебаний в процессе Стодолы.

Однако в процессе вычислений происходит накопление ошибок, в результате чего в пробном векторе проявляются компоненты первой формы, поэтому необходимо повторять эту операцию усечения в каждом цикле итерационного процесса для обеспечения его сходимости ко второй форме колебаний.

Удобным приемом усечения пробного вектора для компоненты первой формы колебаний является замещающая матрица, которую можно получить подстановкой $Y_1^{(0)}$ из уравнения (13.26) в уравнение (13.27), т. е.

$$\tilde{v}_2^{(0)} = v_2^{(0)} - \frac{1}{M_1} \varphi_1 \varphi_1^T m v_2^{(0)} \equiv S_1 v_2^{(0)}, \quad (13.28)$$

где замещающая матрица S_1 для первой формы колебаний имеет вид

$$S_1 \equiv I - \frac{1}{M_1} \varphi_1 \varphi_1^T m. \quad (13.29)$$

Как видно из выражения (13.28), эта матрица обладает свойством исключать компоненту первой формы колебаний из любого пробного вектора, на который эта матрица умножается слева. При этом получаем только форму колебаний в виде усеченного вектора.

При проведении анализа с использованием процесса Стодолы можно с помощью замещающей матрицы добиться того, чтобы результаты сходились ко второй форме колебаний. В этом случае выражение (13.4) имеет вид

$$\frac{1}{\omega_2^2} \tilde{v}_2^{-1} = \tilde{D} v_2^{(0)}. \quad (13.30)$$

Это означает, что пробная вторая форма колебаний, не содержащая компоненты первой формы, сходится ко второй форме соб-

ственных колебаний. Подставляя выражение (13.28) в (13.30), получаем:

$$\frac{1}{\omega_2^2} v_2^{(1)} = DS_1 v_2^{(0)} \equiv D_2 v_2^{(0)}, \quad (13.31)$$

где
$$D_2 \equiv DS_1 \quad (13.32)$$

является новой динамической матрицей, которая исключает компоненту первой формы из любой пробной формы ($v_2^{(0)}$) и таким образом автоматически сходится ко второй форме колебаний. При использовании динамической матрицы D_2 анализ второй формы колебаний абсолютно эквивалентен анализу первой формы, рассмотренному выше. Таким образом, частота может аппроксимироваться эквивалентным выражением (13.10)

$$\omega_2^2 \approx \frac{(\bar{v}_2^{(1)})^T m v_2^{(0)}}{\bar{v}_2^{(1)} m \bar{v}_2^{(1)}}, \quad (13.33)$$

где
$$\bar{v}_2^{(1)} = D_2 v_2^{(0)}$$

и анализ можно проводить до любого заданного уровня сходимости. Само собой разумеется, что первая форма должна вычисляться до определения второй формы колебаний. Таким же образом собственный вектор Φ_1 при вычислении замещающей матрицы S_1 должен определяться с большой точностью, если при анализе второй формы колебаний нужно получить удовлетворительные результаты. Обычно ординаты второй формы колебаний будут примерно на порядок меньше, чем для первой формы.

Пример 13.2. В качестве примера проведения анализа высших форм колебаний с помощью итерации матриц определим вторую форму собственных колебаний рамы для примера 13.1. В рассматриваемом случае замещающая матрица будет определена из выражения (13.154) [а не из выражения (13.29)] потому, что оно более приемлемо при проведении расчетов с помощью логарифмической линейки, особенно в случаях, когда нужно исключить только одну форму колебаний.

Из (13.154) замещающая матрица для первой формы колебаний имеет вид

$$S_1 = \begin{bmatrix} -(\Phi_1^T m_s)^{-1} (\Phi_1^T m_r) & \\ & I \end{bmatrix},$$

где для системы (из примера 13.1) $\Phi_1^T = [1,000 \ 0,646 \ 0,301]$ и m_s —первый столбец матрицы массы: $m_s^T = [1 \ 0 \ 0]$. Таким образом, $\Phi_1^T m_s = 1$.

Аналогично m_r соответствует оставшимся столбцам матрицы масс

$$m_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1,5 & 0 \\ 0 & 2,0 \end{bmatrix}.$$

что приводит к $\Phi_1^T m_r = [0,969 \ 0,602]$, откуда замещающая матрица для первой формы

$$S_1 = \begin{bmatrix} -0,969 & -0,602 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

а динамическая матрица для второй формы собственных колебаний

$$D_2 = DS_1 = \frac{1}{3600} \begin{bmatrix} -3,16 & -2,62 \\ 2,66 & 0,99 \\ 1,06 & 2,80 \end{bmatrix}.$$

Итерационный процесс решения для собственной частоты и вектора колебаний второго тона с использованием динамической матрицы приводится ниже в той же последовательности, как в примере 13.1. Очевидно, что в этом случае только выражение $v_r^T = [v_{22} \ v_{32}]$ должно быть включено в пробный вектор $v_2^{(0)}$, так как перемещение v_{12} верхнего этажа определяется из условий ортогональности. Это перемещение нельзя определять до тех пор, пока не будет достигнута сходимость решения для v_r :

$$\begin{array}{c} D_2 \quad v_2^{(0)} \quad \bar{v}_2^{(1)} \quad v_2^{(1)} \quad \bar{v}_2^{(2)} \\ \frac{1}{3600} \begin{bmatrix} -3,16 & -2,62 \\ 2,66 & 0,99 \\ 1,06 & 2,80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,65 \\ 3,85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,95 & 3,52 \\ 1,00 & 3,81 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} \bar{v}_2^{(2)} & \bar{v}_2^{(3)} & v_2^{(3)} & \bar{v}_2^{(4)} & v_2^{(4)} \\ 0,92 & 3,44 & 0,91 & 3,41 & -1,46 \\ 1,00 & 3,77 & 1,00 & 3,76 & 0,91 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1,00 \\ -0,62 \\ -0,68 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \text{Окончательная форма} \end{array}$$

В полученном решении перемещения были нормированы делением на наибольшее из двух перемещений, рассмотренных в процессе итерации. Следовательно, значение v_{21} , вычисленное после сходимости v_r , оказалось больше 1; этот вектор был вновь нормирован в последнем столбце, чтобы сравнить форму колебаний с формой, полученной ранее в примере 11.2. Небольшое расхождение объясняется накоплением ошибок в этих расчетах, сделанных с помощью логарифмической линейки.

Частота второй формы колебаний, вычисленная по результатам последнего итерационного цикла, равна:

$$\omega_2^2 = \frac{v_{32}^{(3)}}{v_{22}^{(4)}} = \frac{1}{(1/3600) 3,76} = 958$$

и хорошо согласуется с величиной 966, полученной в примере 11.1.

Конечно, сходимость метода будет обеспечена, если при вычислениях учитывается достаточное число знаков.

13.2.4. Анализ третьей и последующих форм колебаний. Из изложенного видно, что замещение можно применять и для усечения пробного вектора компонент как первой, так и второй формы колебаний, что обеспечит сходимость процесса Стодолы к третьей форме. Принимая усеченный пробный собственный вектор для третьей формы колебаний по аналогии с выражением (13.27) в виде

$$\bar{v}_3^{(0)} = v_3^{(0)} - \Phi_1 Y_1^{(0)} - \Phi_2 Y_2^{(0)} \quad (13.34)$$

и используя условия ортогональности $\tilde{v}_3^{(0)}$ по отношению к φ_1 и φ_2 :

$$\varphi_1^T m \tilde{v}_3^{(0)} = 0 = \varphi_1^T m v_3^{(0)} - M_1 Y_1^{(0)};$$

$$\varphi_2^T m \tilde{v}_3^{(0)} = 0 = \varphi_2^T m v_3^{(0)} - M_2 Y_2^{(0)},$$

получаем выражения амплитуд пробного вектора $v_3^{(0)}$ для первой и второй формы собственных колебаний:

$$Y_1^{(0)} = \frac{1}{M_1} \varphi_1^T m v_3^{(0)}; \quad (13.35a)$$

$$Y_2^{(0)} = \frac{1}{M_2} \varphi_2^T m v_3^{(0)}, \quad (13.35b)$$

что эквивалентно выражению (13.26). Подставляя эти значения в выражение (13.34), получаем:

$$\tilde{v}_3^{(0)} = v_3^{(0)} - \frac{1}{M_1} \varphi_1 \varphi_1^T m v_3^{(0)} - \frac{1}{M_2} \varphi_2 \varphi_2^T m v_3^{(0)}$$

или

$$\tilde{v}_3^{(0)} = \left[I - \frac{1}{M_1} \varphi_1 \varphi_1^T m - \frac{1}{M_2} \varphi_2 \varphi_2^T m \right] v_3^{(0)}. \quad (13.36)$$

Выражение (13.36) показывает, что замещающая матрица S_2 , которая исключает компоненты первой и второй формы колебаний из $v_3^{(0)}$, может быть получена простым вычитанием члена для второй формы колебаний из замещающей матрицы (13.29) для первой формы, т. е.

$$S_2 = S_1 - \frac{1}{M_2} \varphi_2 \varphi_2^T m, \quad (13.37)$$

где операция замещения матрицы имеет вид

$$\tilde{v}_3^{(0)} = S_2 v_3^{(0)}. \quad (13.38)$$

Соотношение Стодолы для анализа третьей формы колебаний может быть записано по аналогии с выражением (13.31):

$$\frac{1}{\omega_3^2} v_3^{(1)} = D \tilde{v}_3^{(0)} = D S_2 v_3^{(0)} \equiv D_3 v_3^{(0)}. \quad (13.39)$$

Следовательно, эта модифицированная динамическая матрица D_3 выполняет функцию исключения компонент первой и второй формы колебаний из пробного вектора $v_3^{(0)}$ и, таким образом, обеспечивает сходимость к третьей форме колебаний.

Этот процесс можно применить и при последовательном анализе более высоких форм собственных колебаний системы. Например, при вычислении четвертой формы замещающая матрица S_3 принимается в виде

$$S_3 = S_2 - \frac{1}{M_3} \varphi_3 \varphi_3^T m, \quad (13.40)$$

т. е.

$$\tilde{v}_4^{(0)} = S_3 v_4^{(0)}. \quad (13.41)$$

Соответствующая динамическая матрица имеет вид

$$D_4 = D S_3.$$

Соответствующие матрицы для определения любой формы колебаний могут быть легко получены по аналогии, т. е.

$$S_n = S_{n-1} - \frac{1}{M_n} \varphi_n \varphi_n^T m, \quad D_{n+1} = D S_n. \quad (13.42)$$

Очевидно, что самое важное условие использования данного метода—предварительное вычисление всех низших форм собственных колебаний до любой формы колебаний высшего порядка. Очень важно также определять низшие формы с большой степенью точности, чтобы замещающая матрица при определении форм колебаний высшего порядка приводила к хорошим результатам. Обычно этот процесс применяется для определения не более четырех-пяти форм собственных колебаний.

13.2.5. Анализ высшей формы колебаний. Представляет, по крайней мере, академический интерес использование метода Стодолы для определения высшей формы колебаний сооружений. Если выражение (13.1) умножить слева на $\omega^2 m^{-1} k$, то можно записать следующее соотношение:

$$\omega^2 \hat{v} = E \hat{v}, \quad (13.43)$$

в котором динамические характеристики системы определяются матрицей

$$E \equiv m^{-1} k \equiv D^{-1}. \quad (13.44)$$

Если ввести пробный вектор для высшей N -й формы колебаний, то соотношение (13.43) принимает вид, аналогичный (13.4),

$$\omega_N^2 v_N^{(1)} = E v_N^{(0)}. \quad (13.45)$$

Таким же образом использование (13.8) и (13.10) приводит к приближенным значениям для частоты N -й формы колебаний:

$$\omega_N^2 \approx \frac{\bar{v}_k^{(1)}}{v_k^{(0)}} \quad (13.46a)$$

или

$$\omega_N^2 \approx \frac{(\bar{v}_N^{(1)})^T m \bar{v}_N^{(1)}}{(\bar{v}_N^{(1)})^T m v_N^{(0)}}, \quad (13.46b)$$

где

$$\bar{v}_N^{(1)} = E \bar{v}_N^{(0)}.$$

Вычисленная форма $\bar{v}_N^{(1)}$ представляет собой лучшую аппроксимацию для высшей формы колебаний, чем первоначальное допущение. Поэтому если ее использовать в качестве нового пробного вектора и повторить процесс необходимое число раз, то высшая форма колебаний будет определена с любой степенью точности.

Доказательство сходимости этого процесса к высшей форме собственных колебаний выполняется точно так же, как при анализе низших форм. Существенным отличием этого доказательства будет то, что член ω_N^2 в знаменателе значительно больше числителя. Это приводит по аналогии с (13.22) к соотношению

$$1 \gg \left(\frac{\omega_{N-1}}{\omega_N}\right)^{2s} \gg \left(\frac{\omega_{N-2}}{\omega_N}\right)^{2s} \gg \left(\frac{\omega_{N-3}}{\omega_N}\right)^{2s} \gg \dots, \quad (13.47)$$

что свидетельствует об увеличении частот для форм колебаний более высокого порядка. Анализ следующей более высокой формы колебаний может быть выполнен с помощью замещающей матрицы и в принципе выполняется аналогично. Однако поскольку сходимость итерационного процесса значительно меньше, чем при использовании обычного метода Стодолы для низших форм колебаний [см. (13.45)], указанный подход редко используется, кроме случаев оценки наивысшей частоты собственных колебаний сооружения.

Пример 13.3.

Анализ третьей формы колебаний трехэтажной рамы, рассмотренной в примере 13.1, можно выполнить вычислением замещающей матрицы для второй формы колебаний, которая определяет динамическую матрицу и обеспечивает сходимость процесса к третьей форме колебаний. Однако проще и точнее в общем случае определить высшую форму колебаний итерацией жесткости в форме динамической матрицы. Этот подход иллюстрируется ниже. Матрица жесткости и матрица, обратная матрице масс, для системы на рис. 13.1 имеет вид

$$k = \begin{cases} 600 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ килофунт/дюйм;} \\ 107 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ тс/см, где } 107 = 600 \cdot 0,178; \end{cases}$$

$$m^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ дюйм/(килофунт} \cdot \text{с}^2); \\ \frac{5,607}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ см/(тс} \cdot \text{с}^2). \end{cases}$$

Тогда жесткость в форме динамической матрицы равна:

$$E = m^{-1} k = 100 \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -4 & 12 & -8 \\ 0 & -6 & 15 \end{bmatrix} \text{ с}^{-2}.$$

Принимая в качестве начального вектора примерную форму для третьего тона колебаний, выполняем итерационный процесс, как показано ниже,

следуя табличной форме примера 13.1.

$$\begin{array}{cccccc} & E & v_3^{(0)} & \bar{v}_3^{(1)} & v_3^{(1)} & \bar{v}_3^{(2)} \\ 100 \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -4 & 12 & -8 \\ 0 & -6 & 15 \end{bmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -12 \\ 1 & 24 \\ -1 & -21 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -0,50 & -9,0 \\ 1,00 & 21,0 \\ -0,88 & -19,2 \end{vmatrix} & \times \\ v_3^{(2)} & \bar{v}_3^{(3)} & v_3^{(3)} & \bar{v}_3^{(4)} & v_3^{(4)} & \bar{v}_3^{(7)} \\ \times \begin{vmatrix} -0,43 & -8,58 \\ 1,00 & 21,00 \\ -0,91 & -19,65 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -0,41 & -8,40 \\ 1,00 & 21,20 \\ -0,95 & -20,10 \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} -0,394 & -8,36 \\ 1,000 & 21,24 \\ -0,956 & -20,34 \end{vmatrix} \\ & & & & \uparrow & \\ & & & & \text{Окончательная форма} & \end{array}$$

Из таблицы видно, что итерационный процесс сходится к высшей форме колебаний значительно медленнее, чем к первой форме колебаний в примере 13.1. Это является общей особенностью метода Стодолы, окончательная форма хорошо согласуется с результатом решения задачи при раскрытии определителя (пример 11.1) и получена с хорошей точностью при использовании логарифмической линейки. Частота из последнего цикла итерации [см. выражение (13.46a)] равна:

$$\omega_3^2 = \frac{\bar{v}_{23}^{(7)}}{v_{23}^{(6)}} = \frac{21,24 \cdot 100}{1} = 2124,$$

что также согласуется с величиной, полученной в примере 11.1. Величина 100 в этом выражении является множителем из динамической матрицы E.

13.3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИИ МАТРИЦ

Итерационный метод Стодолы для определения собственных чисел и векторов можно также использовать при наличии в элементах конструкций осевых сил, если они не изменяются в процессе колебаний сооружения. Для любой заданной схемы осевых нагрузок уравнение Стодолы, эквивалентное (13.44), может быть записано в виде

$$\frac{1}{\omega_1^2} v_1^{(1)} = \bar{D} v_1^{(0)}, \quad (13.48a)$$

где

$$\bar{D} = \bar{k}^{-1} m. \quad (13.48b)$$

Здесь $\bar{k} = k - k_G$ — матрица приведенной жесткости с учетом влияния геометрии системы на жесткостные характеристики [см. выражение 9.20)].

Частоты и формы собственных колебаний можно определить методом Стодолы, как для системы без осевых нагрузок [см. (13.48a)].

Влияние осевых сжимающих усилий сводится к уменьшению жесткости элементов сооружения и приводит, таким образом, к снижению частот собственных колебаний. В пределе частота стремится к нулю и уравнение задачи о собственных значениях системы при статических нагрузках принимает вид

$$(k - \lambda_G k_{G0}) \hat{v} = 0. \quad (11.24')$$

После умножения этого уравнения слева на $(1/\lambda_G)\tilde{\mathbf{f}}$ имеем:

$$\frac{1}{\lambda_G}\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{G}\hat{\mathbf{v}}, \quad (13.49a)$$

$$\text{где } \mathbf{G} = \tilde{\mathbf{f}}\mathbf{k}_{G0}. \quad (13.49b)$$

Выражение (13.49a) записано в той же форме, как и соотношение Стодолы, и может быть решено тем же методом итераций. Собственные числа, обеспечивающие неравенство нулю $\hat{\mathbf{v}}$, характеризуют критические нагрузки, которые определяются параметром λ_G . Если пробный вектор для первой формы потери устойчивости обозначить $\mathbf{v}_1^{(0)}$, то итерационный процесс определяется соотношением

$$\frac{1}{\lambda_{G1}}\mathbf{v}_1^{(1)} = \mathbf{G}\mathbf{v}_1^{(0)}. \quad (13.50)$$

Когда итерационный процесс используется для определения форм потери устойчивости, он называется *методом Вианелло* по имени специалиста, впервые применившего этот метод для анализа устойчивости сооружений. Метод Вианелло в принципе аналогичен методу Стодолы для анализа форм колебаний и не требует дополнительных пояснений, за исключением условия ортогональности, которое при определении высших форм потери устойчивости имеет вид

$$\Phi_m^T \mathbf{k}_{G0} \Phi_n = 0, \quad m \neq n. \quad (13.51)$$

Однако, как правило, интерес представляет только низшая форма потери устойчивости, и поэтому нет необходимости рассматривать методику анализа высших критических форм.

Пример 13.4. Рассмотрим применение метода Вианелло для анализа первой критической нагрузки однородной консольной колонны под действием собственного веса (рис. 13.3, а). Система дискретизирована путем деления на три равных элемента, и в качестве степеней свободы рассматриваются боковые перемещения каждого узла. Предполагается, что равномерно распределенный вес колонны сосредоточен по концам элементов. Следовательно, 1/6 собственного веса сосредоточена вверху колонны и по 1/3 веса — в промежуточных узловых точках. Значения осевых сил N в трех элементах колонны от сосредоточенных нагрузок показаны на рис. 13.3, б.

При использовании линейного приближения [см. (10.36)] матрица упругой жесткости колонны имеет вид

$$\mathbf{k}_G = \begin{bmatrix} \frac{N_1}{l_1} & -\frac{N_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{N_1}{l_1} & \frac{N_1}{l_1} + \frac{N_2}{l_2} & -\frac{N_2}{l_2} \\ 0 & -\frac{N_2}{l_2} & \frac{N_2}{l_2} + \frac{N_3}{l_3} \end{bmatrix} = \frac{W}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

и играет роль матрицы геометрической жесткости \mathbf{k}_{G0} . При последовательном приложении единичных сил к каждому из трех узлов и вычислении прогибов

системы с помощью обычных методов статики сооружений получаем матрицу единичных перемещений колонны

$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{l^3}{6EI} \begin{bmatrix} 54 & 28 & 8 \\ 28 & 16 & 5 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

откуда матрица устойчивости \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{f}}\mathbf{k}_{G0} = \frac{Wl^2}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & 34 & -20 \\ 12 & 21 & -8 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

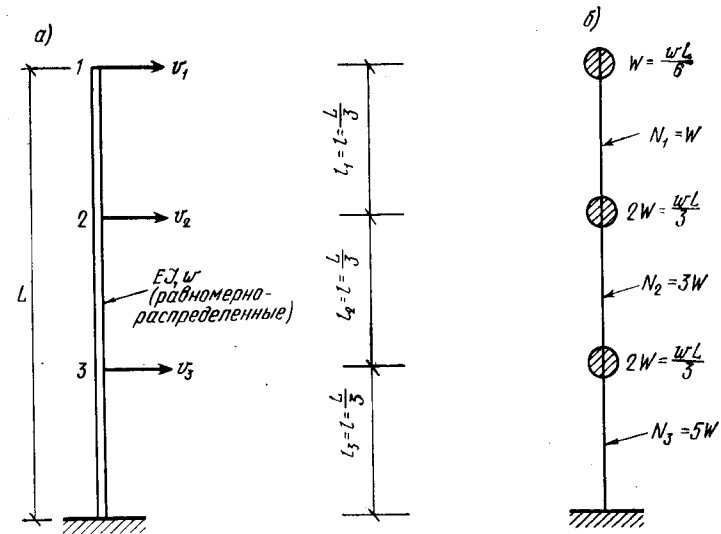


Рис. 13.3. Анализ потери устойчивости колонны под действием собственного веса

а — колонна с распределенными параметрами; б — дискретная система

В качестве предполагаемой первой формы потери устойчивости принята парабола и применен итерационный метод Вианелло в табличной форме, как при анализе форм и частот собственных колебаний.

\mathbf{G}	$\mathbf{v}_1^{(0)}$	$\bar{\mathbf{v}}_1^{(1)}$	$\mathbf{v}_1^{(1)}$	$\bar{\mathbf{v}}_1^{(2)}$	$\mathbf{v}_1^{(2)}$	$\bar{\mathbf{v}}_1^{(3)}$	$\mathbf{v}_1^{(3)}$	$\bar{\mathbf{v}}_1^{(4)}$
$\frac{Wl^2}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & 34 & -20 \\ 12 & 21 & -8 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,00 \\ 0,44 \\ 0,11 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 38,8 \\ 20,3 \\ 5,7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,00 \\ 0,52 \\ 0,15 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 40,7 \\ 21,7 \\ 6,3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,00 \\ 0,534 \\ 0,155 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 41,1 \\ 22,0 \\ 6,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,535 \\ 0,156 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 41,1 \\ 22,0 \\ 6,4 \end{bmatrix}$
								↑ Истинная форма

Этот процесс сходится так же быстро, как метод Стодолы при анализе первых форм колебаний. Коэффициент критической нагрузки из последнего цикла итерации равен:

$$\lambda_{cr} = \frac{v_{11}^{(3)}}{v_{11}^{(4)}} = \frac{1}{41,1(Wl^2/6EI)} = 1,315 \frac{EI}{Wl^2},$$

где окончательный результат выражен через полную высоту колонны L .

Отсюда можно найти критический погонный вес колонны

$$\omega_{cr} = \frac{\lambda_{cr} W}{L/6} = 1,315 \cdot 6 \frac{EI}{L^3} = 7,89 \frac{EI}{L^3}.$$

Поскольку этот результат близок к точному значению $7,83 EI/L^3$, очевидно, что геометрическая жесткость, полученная из линейного приближения, хорошо определяет существо задачи.

Влияние геометрической жесткости на формы и частоты собственных колебаний колонны также можно вычислить с помощью итерации матриц. Если погонный вес имеет вычисленное критическое значение, то частота собственных колебаний равна нулю. Для любой меньшей величины погонного веса можно определить соответствующую частоту. Примем, например, что, $W = 27/26(EI/L^2)$, что составляет $(27/26)/1,315 = 79\%$ критической нагрузки. Тогда геометрическая жесткость определяется подстановкой этого значения в выражение k_G .

Матрица упругой жесткости колонны, полученная обращением матрицы единичных перемещений, равна:

$$k = \frac{6}{26} \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 7 & -16 & 12 \\ -16 & 44 & -46 \\ 12 & -46 & 80 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица приведенной жесткости, которая учитывает влияние осевых усилий в соответствии с (9.20), равна:

$$\begin{aligned} \bar{k} = k - k_G &= \frac{6}{26} \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 7 & -16 & 12 \\ -16 & 44 & -46 \\ 12 & -46 & 80 \end{bmatrix} - \frac{27}{26} \frac{EI}{9l^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{3}{26} \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 13 & -31 & 24 \\ -31 & 84 & -89 \\ 24 & -89 & 152 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Наконец, анализ частот и форм собственных колебаний может быть выполнен методом итерации приведенной динамической матрицы $D = \bar{k}^{-1}m$, где \bar{k}^{-1} — матрица, обратная приведенной матрице жесткости \bar{k} . Окончание этого примера предлагается выполнить читателю.

13.4. МЕТОД ХОЛЬЦЕРА

13.4.1. Основы метода. В основе метода Стодолы лежит последовательное уточнение предполагаемой формы колебаний до тех пор, пока не будет получена истинная форма собственных колебаний, а затем определяется частота собственных колебаний. Рассматриваемый ниже метод Хольцера по существу выполняется в обратном порядке: частота колебаний последовательно уточняется до получения истинной частоты собственных колебаний с параллельным определением формы колебаний.

Метод Хольцера больше приспособлен к анализу сооружений, элементы которых симметричны относительно главной оси. Такие системы часто называют сооружениями в виде цепей. Хотя методика может быть развита для анализа других сооружений с более сложной формой, рассмотрим только элементарное ее приложение, так как целью раздела является прежде всего изложение основной идеи метода, а не особенностей его практического использования.

Характерным примером простого сооружения, к которому можно применить этот метод, является здание, деформирующееся по форме сдвига (рис. 13.4). Предполагается, что плиты перекрытий этого здания бесконечно жесткие, так что боковые перемещения здания определяются только изгибом колонн при нулевых поворотах

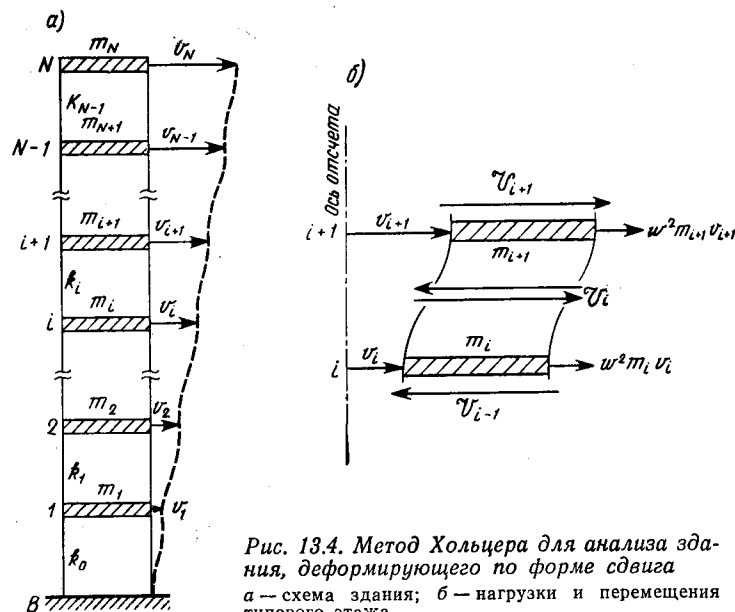


Рис. 13.4. Метод Хольцера для анализа здания, деформирующегося по форме сдвига
а — схема здания; б — нагрузки и перемещения типового этажа

узловых сопряжений. В этом случае жесткость этажа i (сила, вызывающая единичный относительный перекося смежных этажей) равна:

$$k_i = \left(\frac{12EI}{h^3} \right)_i, \quad (13.52)$$

где I характеризует суммарный момент инерции колонн этажа i ; h — высота этажа.

Предполагается также, что все массы сосредоточены в уровне междуэтажных перекрытий и перемещения рамы происходят в ее плоскости.

Для систем рассматриваемого типа характерно, что приращение перемещений любого i -го этажа зависит только от перерезывающей силы V_i в этом уровне, которая, в свою очередь, при свободных колебаниях определяется только общим прогибом в уровне i от сил инерции, пропорциональных перемещениям системы. В связи с указанной особенностью можно для рамы в целом определить силы и перемещения последовательными вычислениями, начиная с крайней узловой точки, если принять предположения о частоте колебаний и неизвестных граничных условиях для начальной точки. Например,

если расчет выполняется начиная с верха рамы (см. рис. 13.4), то необходимо задаться амплитудой перемещений этой точки. Очевидно, что перерезывающая сила выше этого уровня равна 0. При свободных колебаниях амплитуду перемещений можно выбирать произвольной. Частота колебаний является определенной величиной и, если для частоты принято неточное приближение, необходимые граничные условия для другого конца сооружения не будут удовлетворяться. Если, например, для рамы на рис. 13.4 расчет начинается с верха здания при неправильной частоте, то вычисленное

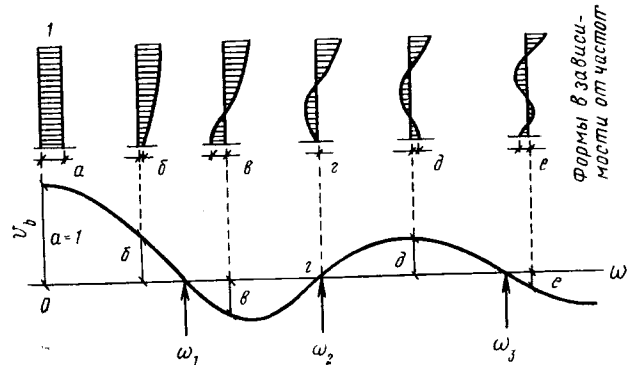


Рис. 13.5. Изменение перемещений основания v_b в зависимости от частоты ω при единичном перемещении верха здания

перемещение в основании не будет равно нулю. По существу анализ не является ошибочным. Просто мы получаем решение для неправильно сформулированной задачи. Искомая форма колебаний будет характеризовать прогибы рамы, если ее основание колеблется с принятой частотой и вычисленной амплитудой.

Истинная частота собственных колебаний может быть найдена последовательными приближениями с последовательным уточнением принятой частоты, пока граничные условия не будут удовлетворяться. На практике значительно проще определить истинную частоту, если построить график значений параметра реакции на опоре, определенных в функции предполагаемой частоты. Такой график для амплитуды перемещений основания при единичных перемещениях верха здания на рис. 13.4 вместе с формами колебаний, соответствующими принятым частотам, приведен на рис. 13.5.

Эта методика может быть использована для определения любой из частот собственных колебаний и соответственно формы колебаний. По существу одно из основных преимуществ метода Хольцера заключается в возможности вычислить любую форму собственных колебаний независимо от остальных. Для зданий, деформирующихся по форме сдвига, номер формы колебаний для любой истинной частоты равен числу узлов (точек с нулевой амплитудой перемещений) на оси здания, включая его основание.

Пример 13.3. Рассмотрим метод Хольцера для анализа частот собственных колебаний и векторов применительно к повторному определению первой частоты и формы собственных колебаний рамы (рис. 13.1). Основные характе-

ристики рамы и основные результаты расчета по методу Хольцера даны на рис. 13.6.

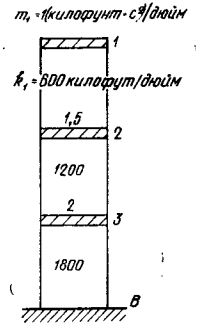
Первый шаг вычислений заключается в выборе пробной частоты колебаний (для рассматриваемого случая $\omega = 10$ рад/с, т. е. $\omega^2 = 100$). С учетом этой частоты и амплитуды перемещений верхнего этажа $v_1 = 1$ дюйм (2,54 см), начиная с определения силы инерции, в этом уровне выполняется расчет, названный пробной частотой I:

$$f_I = \omega^2 m_1 v_1 = 100 \cdot 1 \cdot 1 = 100 \text{ килофунт} [= 100 \cdot 0,178 \cdot 2,54 = 45,3 \text{ тс}].$$

Рис. 13.6. Анализ форм колебания здания методом Хольцера

I, II и III — пробная частота

v	I ($\omega^2 = 100$)				II ($\omega^2 = 200$)				III ($\omega^2 = 209$)			
	Δv	\mathcal{P}	f_I		v	Δv	\mathcal{P}	f_I	v	Δv	\mathcal{P}	f_I
1,000	0,167	100	100	1,000	0,333	200	200	1,000	0,348	209	209	
0,833	0,187	225	125	0,667	0,333	400	200	0,652	0,344	419	204	
0,646	0,197	354	129	0,334	0,296	533	133	0,308	0,301	542	129	
0,449				0,038				0,007				



Этой силе соответствует перерезывающая сила $\mathcal{P}_1 = 100$ килофунтов (45,3 тс), а прогиб верхнего этажа здания равен:

$$\Delta v_1 = \frac{\mathcal{P}_1}{k_1} = \frac{100}{600} = 0,167 \text{ дюйма} \left[= \frac{45,3}{107} = 0,424 \text{ см} \right].$$

Тогда перемещение второго этажа $v_2 = v_1 - \Delta v_1 = 0,833$ дюйма [2,12 см]. Если это перемещение определено, то сила инерции в уровне второго этажа

$$f_{I2} = \omega^2 m_2 v_2 = 100 \cdot 1,5 \cdot 0,833 = 125 \text{ килофунтов} \\ [= 100 \cdot 0,267 \cdot 2,12 = 56,6 \text{ тс}].$$

Складывая ее с силой инерции для верхнего этажа, получаем перерезывающую силу 225 килофунтов [101,9 тс] для второго этажа. Делением этой силы на жесткость второго этажа определяем деформацию Δv_2 и, вычитая Δv_2 из v_2 , — перемещение v_3 . После выполнения вычислений для первого этажа получаем, что перемещение основания равно 0,449 дюйма [1,14 см]. Этот результат означает, что при гармоническом колебании основания с амплитудой 0,449 дюйма (1,14 см) для частоты 10 рад/с амплитуда верха рамы равна 1 дюйм (2,54 см). Из анализа формы перемещений (отсутствие узлов) следует, что частота $\omega = 10$ рад/с меньше частоты первой формы собственных колебаний.

Поскольку частота 10 рад/с слишком мала, первая попытка не позволяет судить о частоте первой формы собственных колебаний. Поэтому при втором пробном расчете принимаем $\omega^2 = 200$. Снова полагаем перемещение верха рамы равным 1 дюйму (2,54 см) и определяем форму изгиба в результате расчетов, названных «пробная частота II». На этот раз перемещение основания равно лишь 0,038 дюйма [0,97 см], т. е. приближение $\omega^2 = 200$ довольно близко к истинной частоте собственных колебаний.

С учетом результатов двух попыток надежная оценка истинного значения частоты может быть получена с помощью линейной экстраполяции, как показано на рис. 13.5. В аналитической форме выражение для экстраполяции имеет вид

$$\left(\frac{\Delta \omega^2}{\Delta v_B} \right)_{1-2} = \left(\frac{\Delta \omega^2}{\Delta v_B} \right)_{2-3}$$

Здесь нижние индексы относятся к номерам пробных попыток, при которых найдены приращения величин. Получаем соотношение

$$\frac{100}{0,411} = \frac{\Delta\omega_{2-3}^2}{0,038} \text{ и } \Delta\omega_{2-3}^2 = 9.$$

Следовательно, для третьего пробного расчета $\omega^2 = 209$. Перемещение основания здания по результатам этого этапа расчетов равно 0,007 дюйма [0,018 см], что достаточно близко к требуемому нулевому значению. Тот факт, что нулевое значение перемещений не достигнуто, свидетельствует о том, что v_B не является линейной функцией ω^2 . Если снова повторить операцию экстраполяции

$$\frac{9}{0,031} = \frac{\Delta\omega_{3-4}^2}{0,007}, \quad \Delta\omega_{3-4}^2 = 2,$$

то получаемый результат $\omega^2 = 211$ вполне точен. При этой частоте вектор перемещений $vT = [1,000 \ 0,648 \ 0,301 \ 0,000]$, что согласуется с ранее выполненными расчетами с точностью вычислений на логарифмической линейке.

13.4.2. Метод передаточной матрицы. Метод Хольцера для анализа частот и векторов собственных колебаний может эффективно использоваться в матричной форме при введении специального типа

матрицы, которая называется *передаточной матрицей*. Эти матрицы определяют силы и перемещения для одного звена здания типа цепей через соответствующие силы и перемещения для смежного звена. Таким образом, полная система сил и перемещений для сооружения в целом определяется последовательностью произведений передаточных матриц.

Удобно передаточные матрицы разделить на две части: матрицы поля, которые характеризуют передачу через упругие элементы между массами, и матрицы точек, которые характеризуют передачу через сосредоточенные массы. Упругое поле для уровня i системы (рис. 13.4) показано на рис. 13.7. Вектор состояния η_i , определяющий силу и перемещение в уровне i' , может быть выражен через вектор состояний в уровне i (на другом конце звена) с помощью матрицы поля

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\tilde{f}_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{i'} \\ v_{i'} \end{bmatrix}, \quad (13.53a)$$

где $\tilde{f}_i = 1/k_i$ — единичное перемещение i -го этажа (прогиб при единичной перерезывающей силе).

В символической форме выражение (13.53a) можно записать

$$\eta_i = T_{fi} \eta_{i'}, \quad (13.53b)$$

где T_{fi} — квадратная матрица поля для звена i .

Масса точки для уровня $i + 1$ также показана на рис. 13.7. Матрица точки, которая преобразует вектор состояния при переходе через этот уровень, имеет вид

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_{i+1}' \\ v_{i+1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \omega^2 m_{i+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (13.54a)$$

или

$$\eta_i' = T_{p, i+1} \eta_{i+1}, \quad (13.54b)$$

где $T_{p, i+1}$ — матрица точки для уровня $i + 1$.

Передаточная матрица T_{i+1} для звена в целом может быть представлена объединением матрицы точки и матрицы поля

$$\eta_i = T_{fi} \eta_i' = T_{fi} T_{p, i+1} \eta_{i+1} \equiv T_{i+1} \eta_{i+1} \quad (13.55)$$

или, используя выражения (13.53) и (13.54),

$$T_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\tilde{f}_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \omega^2 m_{i+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \omega^2 m_{i+1} \\ -\tilde{f}_i & 1 - \omega^2 \tilde{f}_i m_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (13.56)$$

Используя последовательность передаточных матриц, вектор состояния для любой точки можно выразить через вектор состояний любой другой точки, т. е. вектор состояний в уровне основания сооружения определяется в функции вектора состояний для его верха:

$$\eta_B = T_1 \eta_1 = T_1 T_2 \eta_2 = \dots = T_1 T_2 \dots T_{N-1} T_N \eta_N, \quad (13.57)$$

где нижние индексы B и N относятся к двум концам сооружения, как показано на рис. 13.4.

Если \bar{T}_N представить в виде

$$\bar{T}_N \equiv T_1 T_2 T_3 T_4 \dots T_{N-1} T_N, \quad (13.58)$$

то выражение (13.57) можно записать

$$\eta_B = \bar{T}_N \eta_N. \quad (13.59a)$$

Следовательно, \bar{T}_N — матрица размером 2×2 характеризует векторы состояний для двух конечных точек системы.

Подставляя в (13.59a) элементы матриц, получаем:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_B \\ v_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{ss} & t_{sv} \\ t_{vs} & t_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_N \\ v_N \end{bmatrix}, \quad (13.59b)$$

и после введения заданных граничных условий можно определить уравнение N -й степени относительно ω^2 для нахождения частот собственных колебаний системы. Например, граничные условия для системы на рис. 13.4: $v_B = 0$ и $\mathcal{V}_N = 0$. Если принять, что ампли-

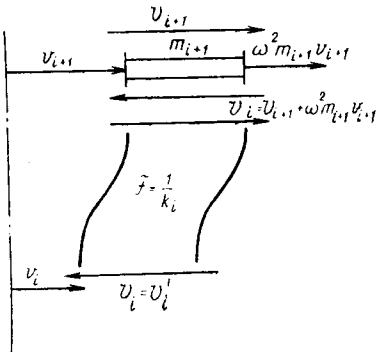


Рис. 13.7. Векторы состояний в здании, деформирующемся по форме сдвига

туда колебаний $v_N = 1$, то второе выражение в (13.59б) принимает вид

$$v_B = t_{vv} \omega^2, \quad (13.59в)$$

где t_{vv} принято в виде функции от ω^2 , а ω^2 характеризует частоты собственных колебаний, при которых удовлетворяются нулевые граничные условия в основании сооружения.

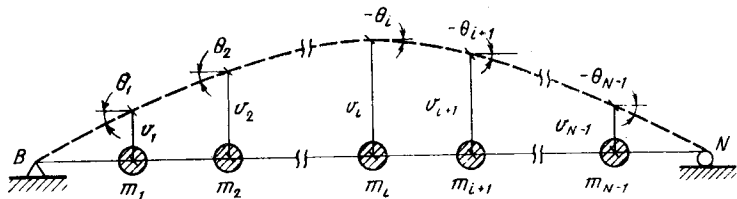


Рис. 13.8. Степени свободы системы, работающей на изгиб

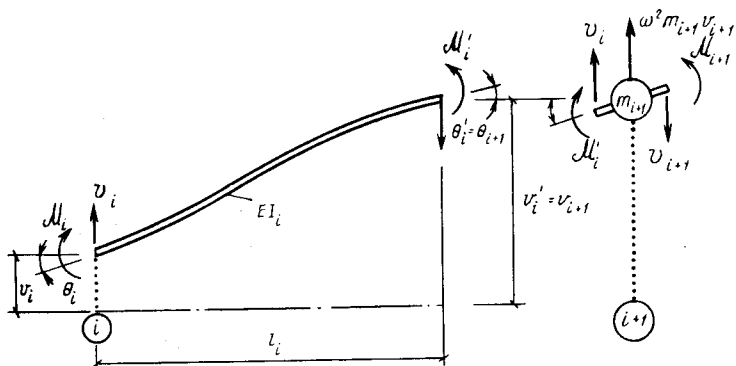


Рис. 13.9. Векторы состояний элемента балки

13.4.3. Метод Хольцера — Миклстада. Анализ систем типа зданий, деформирующихся по форме сдвига, с помощью метода Хольцера (или передаточных матриц) особенно прост, если каждый узел имеет только одну степень свободы. Развитие метода для анализа изгибаемых систем, имеющих по две степени свободы для каждого узла, было впервые предложено Миклстадом, и поэтому разработанный метод называется *методом Хольцера — Миклстада*. Модель характерной системы, работающей на изгиб, показана на рис. 13.8. Массы предполагаются сосредоточенными в ряде точек вдоль оси системы, а в качестве степеней свободы принимаются поступательные перемещения и углы поворота этих точек (инерцией поворота масс обычно пренебрегают, но она может быть учтена без затруднений). Звенья балки, связанные в точках расположения масс, предполагаются невесомыми, а изгибная жесткость EI — постоянной для всех звеньев.

Анализ такой конструкции также удобнее всего выполнять с помощью передаточных матриц. Для этого снова следует ввести два

вида матриц: матрицы поля и матрицы точек. Силы и перемещения, определяющие векторы состояний, которые связаны с характерной матрицей поля, показаны на рис. 13.9. Получаем

$$\begin{bmatrix} \varphi'_i \\ M_i \\ \theta_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -l_i & 1 & 0 & 0 \\ \frac{l_i^2}{2EI_i} & -\frac{l_i}{EI_i} & 1 & 0 \\ -\frac{l_i^3}{6EI_i} & \frac{l_i}{2EI_i} & -l_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi''_i \\ M'_i \\ \theta'_i \\ v'_i \end{bmatrix} \quad (13.60а)$$

или в символической форме

$$\eta_i = T_{fi} \eta'_i. \quad (13.60б)$$

Коэффициенты матрицы поля T_{fi} легко определяются по элементарной теории изгиба балок.

Векторы состояний, связанные с матрицей точек, для точки $i + 1$ также приведены на рисунке, и соответствующее соотношение имеет вид

$$\begin{bmatrix} \varphi''_{i+1} \\ M_{i+1} \\ \theta_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\omega^2 m_{i+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi''_{i+1} \\ M_{i+1} \\ \theta_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix} \quad (13.61а)$$

или

$$\eta'_i = T_{p, i+1} \eta_{i+1}. \quad (13.61б)$$

Когда матрицы поля и точек определены в соответствии с (13.60) и (13.61), общая передаточная матрица для звена равна:

$$T_{i+1} = T_{fi} T_{p, i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\omega^2 m_{i+1} \\ -l_i & 1 & 0 & \omega^2 l_i m_{i+1} \\ \frac{l_i^2}{2EI_i} & -\frac{l_i}{EI_i} & 1 & -\omega^2 \frac{l_i^2 m_{i+1}}{2EI_i} \\ -\frac{l_i^3}{6EI_i} & \frac{l_i}{2EI_i} & -l_i & \omega^2 \frac{l_i^3 m_{i+1}}{6EI_i} + 1 \end{bmatrix}. \quad (13.62)$$

Тогда вектор состояний для одного конца сооружения может быть выражен через вектор состояний для другого конца [см. выражения (13.57) и (13.59а)], но для рассматриваемой системы передаточная матрица T_N для всей системы имеет размер 4×4 . Распространяя соотношения (13.59а) на изгибаемые системы, получаем:

$$\begin{bmatrix} \varphi_B \\ M_B \\ \theta_B \\ v_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{ss} & t_{sm} & t_{s\theta} & t_{sv} \\ t_{ms} & t_{mm} & t_{m\theta} & t_{mv} \\ t_{\theta s} & t_{\theta m} & t_{\theta\theta} & t_{\theta v} \\ t_{vs} & t_{vm} & t_{v\theta} & t_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_N \\ M_N \\ \theta_N \\ v_N \end{bmatrix}. \quad (13.63)$$

Если в (13.63) ввести граничные условия, то два вектора состояний исчезнут и получится матрица соответственно меньших размеров. Для шарнирно опертой балки, показанной на рис. 13.8, для каждой опоры момент и перемещение становятся равными нулю, и выражение принимает вид

$$\begin{bmatrix} M_B \\ v_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{ms} & t_{m\theta} \\ t_{vs} & t_{v\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_N \\ \theta_N \end{bmatrix}. \quad (13.64)$$

Вводя обозначение $\theta_N = 1$ для любой единичной амплитуды углов поворота, из первого уравнения можно определить величину перерезывающей силы

$$0 = t_{ms} \psi_N + t_{m\theta},$$

откуда

$$\psi_N = -\frac{t_{m\theta}}{t_{ms}}. \quad (13.65)$$

Тогда из второго уравнения (13.64) определяем соотношение для свободных колебаний

$$v_B = 0 = t_{vs} \psi_N + t_{v\theta} = t_{v\theta} - \frac{t_{m\theta} t_{vs}}{t_{ms}}. \quad (13.66)$$

Каждый из этих коэффициентов является функцией ω^2 . Поэтому значения ω^2 , приводящие к нулевому прогибу $v_B = 0$, есть частоты собственных колебаний системы [другими словами, частоты собственных колебаний можно определить, приравнявая нулю определитель квадратной матрицы в (13.64)].

Отметим, что для данной методики вычислений граничное условие в точке N должно быть введено в соотношения для передаточных матриц с самого начала, т. е.

$$\eta_B = T_1 T_2 \dots T_{N-1} T_N \eta_N, \quad (13.67)$$

поскольку, когда умножение матриц производится справа налево, необходимо рассматривать только два столбца перед перемножением передаточных матриц справа. Передаточные матрицы применимы также для расчета более сложных конструкций типа цепей с числом степеней свободы для каждого узла более двух¹.

13.5. УМЕНЬШЕНИЕ ЧИСЛА СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

13.5.1. Исходные предпосылки. Хотя современные методы динамического расчета применимы для решения систем с числом степеней свободы, равным нескольким сотням, их нельзя в том же виде использовать при статическом расчете математических моделей сложных систем с числом степеней свободы в несколько тысяч. Более

того, редко представляет интерес определение более десяти форм собственных колебаний для большинства сложных строительных конструкций, поскольку в расчете используется метод сложения форм колебаний, а сила в основном зависит только от нескольких низших форм. Поэтому разработаны различные методы экономичного решения задачи о собственных значениях, которые позволяют уменьшить большое число степеней свободы, определяющих динамические характеристики сооружения, до значительно меньшего числа, необходимого при динамическом анализе.

С первого взгляда может показаться более целесообразным использовать меньшее число степеней свободы при первоначальном представлении жесткостных характеристик сооружения и анализе его колебаний. Однако на самом деле точное выражение упругих характеристик сооружения требует использования более сложной математической модели, чем выражения для инерционных характеристик. Это объясняется тем, что инерционные характеристики (или кинетическая энергия) непосредственно зависят от перемещений сооружения, между тем жесткостные характеристики (или потенциальная энергия) являются функциями производных от перемещений, а, как хорошо известно, производные сложнее точно аппроксимировать, чем перемещения. Более того, во многих случаях **основная задача расчета состоит в вычислении напряжений в сооружении, а они также требуют более подробного описания динамической системы, чем это необходимо при определении переменных прогибов.** По этим причинам (и практика расчетов подтвердила это положение) динамический анализ может выполняться эффективно, если сначала разработана модель конструкции для анализа статических напряжений, а затем существенно сокращено число степеней свободы перед выполнением динамического анализа.

Два общих принципа эффективно используются для сокращения динамических степеней свободы. Наиболее простой из них основан на допущении, что инерционные силы определяются только конечным числом выбранных степеней свободы первоначальной модели. Остальные степени свободы не включаются в динамический анализ и поэтому могут быть исключены из соответствующих выражений. При втором подходе число динамических степеней свободы ограничивается благодаря предположению, что перемещения сооружения связаны определенными соотношениями и амплитуды принимаются в качестве обобщенных координат при динамическом анализе. Каждый из этих подходов широко используется во многих специальных методиках, и их характерные особенности рассматриваются ниже.

13.5.2. Уменьшение числа дискретных масс. При анализе различных сооружений принято уменьшать число динамических степеней свободы, полагая, что массы сосредоточены в узлах пересечения элементов. Пренебрежение инерцией поворота сосредоточенных масс приводит к сокращению на одну треть числа степеней свободы плоской рамы или на одну вторую пространственной рамы.

¹ Более подробное изложение см. в кн. Pestel E. C., Leckie F. A., Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1963.

Если исключить из рассмотрения осевые деформации элементов (что позволяет пренебречь только небольшим числом поступательных степеней свободы), то дополнительное ограничение динамических степеней свободы поворота является более существенным. При динамическом расчете рамных сооружений число учитываемых степеней свободы обычно не превышает 10% их числа в случае статического расчета. Для ряда конструктивных решений можно достигнуть дальнейшего уменьшения, предполагая, что масса сосредоточена только в конечном числе выбранных узловых сопряжений. Однако широкое использование этого приема представляется менее надежным, чем простое ограничение степеней свободы при повороте (поскольку с ними связана только очень небольшая часть кинетической энергии сооружения).

Исключение несущественных степеней свободы обычно выполняется методом статического уплотнения [см. выражение (10.47)]. Рассмотрим в качестве примера уравнение свободных колебаний (11.4), представленное в следующем виде:

$$k\hat{v} = \omega^2 m\hat{v}, \quad (13.68)$$

где вектор перемещения \hat{v} характеризует все степени свободы.

Если теперь эти перемещения разделить на подвектор \hat{v}_0 , для которого предполагается отсутствие инерционных сил, и подвектор \hat{v}_t , который связан с ненулевыми коэффициентами матрицы масс, то при соответствующем разделении матриц масс и жесткостей выражение (13.68) можно записать

$$\begin{bmatrix} k_{00} & k_{0t} \\ k_{t0} & k_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_t \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_t \end{bmatrix}. \quad (13.69)$$

Здесь предполагается, что матрица масс диагональная. Используя метод статического уплотнения, получаем усеченное уравнение колебаний

$$k_t \hat{v}_t = \omega^2 m_{tt} \hat{v}_t, \quad (13.70)$$

где k_t — усеченная матрица жесткостей, которая может быть выражена в форме, эквивалентной соотношению (10.47).

Хотя принцип статического уплотнения хорошо известен и широко используется для исключения несущественных степеней свободы в системах небольшого порядка, он не всегда эффективен для больших систем. Альтернативный подход, более эффективный во многих случаях, основан на составлении усеченной матрицы единичных перемещений для требуемого числа степеней свободы. Она может быть получена при последовательном приложении единичных сил вдоль каждой из существенных степеней свободы и при определении соответствующих перемещений по указанным направлениям. Сгруппированные вместе единичные перемещения образуют усеченную матрицу \hat{f}_t , которая обратна матрице k_t . Эта матрица может быть обращена для получения усеченного уравнения свободных колебаний в форме (13.70) или может быть использована (что предпочтитель-

нее) для записи уравнения свободных колебаний в форме, эквивалентной (13.1). Тогда для усеченного уравнения колебаний получим:

$$\frac{1}{\omega^2} \hat{v}_t = \hat{f}_t m_{tt} \hat{v}_t. \quad (13.71)$$

13.5.3. Метод Релея для систем в дискретных координатах. Уменьшение числа степеней свободы методом статического уплотнения может быть весьма эффективно для определенного класса сооружений. Однако применимость метода и объем сокращения ограничены. Методика уменьшения степеней свободы, основанная на использовании обобщенных координат, характеризующих амплитуды предполагаемых перемещений, применима к любым конструктивным решениям и позволяет достигнуть любого желаемого уменьшения числа степеней свободы. Поэтому в прикладных задачах динамики сооружений широко используется несколько методов, основанных на указанном подходе. По существу все эти методы аналогичны методу Релея, а его обобщение известно как метод Релея — Ритца. Применение методов Релея к дискретным координатам описано в настоящем разделе, а выражения Ритца рассмотрены в следующем разделе.

Метод Релея, который ранее применялся для выбора модели в виде системы с одной степенью свободы при анализе любого сооружения, в равной степени применим, если характеристики системы выражены в виде матриц в дискретных координатах. Для использования этого метода перемещения сооружения необходимо выразить в виде предполагаемой формы колебаний и амплитуды обобщенной координаты. В матричном виде перемещения при предполагаемых свободных колебаниях записываются следующим образом [сравните с выражением (8.5)]:

$$v(t) = \psi Z(t) = \psi Z_0 \sin \omega t, \quad (13.72a)$$

где ψ — вектор предполагаемой формы; $Z(t)$ — амплитуда обобщенной координаты.

Вектор скорости при свободных колебаниях

$$\dot{v}(t) = \psi \omega Z_0 \cos \omega t. \quad (13.72b)$$

Максимальная кинетическая энергия в матричной форме имеет вид

$$T_{\max} = 1/2 \dot{v}_{\max}^T m \dot{v}_{\max}, \quad (13.73a)$$

а максимум потенциальной энергии

$$V_{\max} = 1/2 v_{\max}^T k v_{\max}. \quad (13.73b)$$

Если подставить выражение для максимального перемещения и скорости, то

$$T_{\max} = 1/2 Z_0^2 \omega^2 \psi^T m \psi, \quad (13.74a)$$

$$V_{\max} = 1/2 Z_0^2 \psi^T k \psi. \quad (13.74b)$$

Тогда можно получить в соответствии с принципом Релея частоту собственных колебаний

$$\omega^2 = \frac{\Psi^T k \Psi}{\Psi^T m \Psi} \equiv \frac{k^*}{m^*}. \quad (13.75)$$

Следует отметить, что выражение (13.75) есть матричный эквивалент (8.10).

Улучшенный метод Релея [см. (8.20) или (8.32)] также можно представить в матричной форме. Если начальное приближение перемещения обозначить

$$v^{(0)} = \Psi Z, \quad (13.76)$$

то инерционные силы при свободных колебаниях равны [см. (11.33)]

$$f_I = \omega^2 m v^{(0)} = \omega^2 m \Psi Z \quad (13.77)$$

и прогибы при этих силах

$$v^{(1)} = \tilde{f} f_I = \omega^2 \tilde{f} m \Psi Z, \quad (13.78)$$

что является, как показано при рассмотрении метода Стодолы, лучшим приближением для первой формы колебаний. Таким образом, если вычисленную форму использовать в методе Релея, то мы получим лучший результат, чем первоначальное приближение. После подстановки выражения (13.78) в (13.73) из условия равенства последних

$$\omega^2 = \frac{\Psi^T m \tilde{f} m \Psi}{\Psi^T m \tilde{f} m \Psi}, \quad (13.79)$$

что представляет собой соотношение для улучшенного метода Релея (метода R_{11}). Из сравнения (13.79) с (13.10) видно, что частота, полученная с помощью улучшенного метода Релея, совпадает с частотой после первого шага анализа методом Стодолы, если при усреднении процесса в качестве весового коэффициента принята масса системы.

13.5.4. Метод Релея — Ритца. Хотя метод Релея приводит к удовлетворительной оценке первой формы собственных колебаний для большинства систем, часто требуется для достижения необходимой точности использовать в динамическом анализе больше одной формы колебаний. Развитый Ритцем метод Релея — один из самых удобных методов для определения нескольких первых форм собственных колебаний. В качестве основной предпосылки метода Ритца принято, что вектор перемещений может быть выражен следующим образом через систему векторов Ψ с амплитудами Z :

$$v = \psi_1 Z_1 + \psi_2 Z_2 + \psi_3 Z_3 + \dots$$

или

$$v = \Psi Z, \quad (13.80)$$

где амплитуды обобщенных координат Z пока неизвестны.

Для получения наилучших результатов, по крайней мере для необходимого числа координат, каждый из векторов ψ_n должен быть принят как приближение соответствующей истинной формы колебаний Φ_n . Для выбора пробных векторов было предложено несколько других выражений. Например, методика статического уплотнения может рассматриваться как способ определения системы векторов по методу Ритца. Условие равенства нулю выбранной системы упругих сил представляет собой ограничение, которое позволяет выразить ряд перемещений через все другие перемещения. Такие соотношения даются выражениями (10.45) или в обозначениях (13.69) следующей формулой:

$$\hat{v}_0 = -k_0^{-1} k_{0t} \hat{v}_t.$$

Следовательно, полный вектор перемещений также можно выразить через ненулевые составляющие силы включением единичной матрицы соответствующего порядка в преобразование

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_0^{-1} & k_{0t} \\ & I \end{bmatrix} \hat{v}_t,$$

здесь вторая матрица в квадратных скобках эквивалентна предполагаемым формам Ψ [см. уравнение (13.80)], а вектор \hat{v}_t характеризует обобщенные координаты Z .

В методе Ритца можно использовать любое требуемое число пробных векторов. В принципе их рекомендуется выбирать столько же, сколько предполагаемых форм Ψ . Если необходимо с достаточной точностью определить $s/2$ форм и частот собственных колебаний, то в расчете следует учитывать s пробных векторов.

Выражения для максимальной кинетической и потенциальной энергии системы могут быть получены подстановкой (13.80) в (13.73), что дает:

$$T_{\max} = 1/2 \omega^2 Z^T \Psi^T m \Psi Z; \quad (13.81a)$$

$$V_{\max} = 1/2 Z^T \Psi^T k \Psi Z. \quad (13.81b)$$

Из равенства этих выражений получаем:

$$\omega^2 = \frac{Z^T \Psi^T k \Psi Z}{Z^T \Psi^T m \Psi Z} \equiv \frac{\tilde{k}(Z)}{\tilde{m}(Z)}. \quad (13.82)$$

Значение (13.82) не определяет точное выражение частоты собственных колебаний, так как числитель и знаменатель являются функциями пока неизвестных амплитуд обобщенных координат Z . Для их определения будет использовано условие, что метод Релея дает верхнюю границу частоты собственных колебаний. Другими словами, любая принятая форма колебаний приводит к определению частоты, которая больше истинной частоты. Поэтому наилучшее приближение для формы колебаний, т. е. оптимальный выбор Z , минимизирует частоту.

Таким образом, дифференцирование выражения для частоты по любой из обобщенных координат и приравнение производной нулю дает:

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial Z_n} = \frac{\tilde{m} (\partial \tilde{k} / \partial Z_n) - \tilde{k} (\partial \tilde{m} / \partial Z_n)}{\tilde{m}^2} = 0, \quad (13.83)$$

но в соответствии с выражением (13.82) $\tilde{k} = \omega^2 \tilde{m}$, поэтому из (13.83) получим:

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial Z_n} - \omega^2 \frac{\partial \tilde{m}}{\partial Z_n} = 0. \quad (13.84)$$

Теперь из определения (13.82)

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial Z_n} = 2Z^T \Psi^T k \Psi \frac{\partial}{\partial Z_n} (Z) = 2Z^T \Psi^T k \Psi_n \quad (13.85a)$$

и аналогично

$$\frac{\partial \tilde{m}}{\partial Z_n} = 2Z^T \Psi^T m \Psi_n. \quad (13.85b)$$

Подставляя соотношения (13.85) в (13.84) и транспонируя, получаем:

$$\Psi_n^T k \Psi Z - \omega^2 \Psi_n^T m \Psi Z = 0. \quad (13.86)$$

Минимизация частоты по каждой из обобщенных координат приводит к уравнению типа (13.86) для каждого вектора формы Ψ_n .

Поэтому полная система уравнений имеет вид

$$\Psi^T k \Psi Z - \omega^2 \Psi^T m \Psi Z = 0.$$

Вводя обозначения:

$$k^* = \Psi^T k \Psi; \quad (13.87a)$$

$$m^* = \Psi^T m \Psi, \quad (13.87b)$$

получаем:

$$(k^* - \omega^2 m^*) \hat{Z} = 0, \quad (13.88)$$

где \hat{Z} характеризует каждый собственный вектор (относительные величины Z), который удовлетворяет данной задаче о собственных значениях.

Сравнение (13.88) и (11.4) показывает, что метод Релея — Ритца характеризует уменьшение числа степеней свободы системы от N (которые определяются геометрическими координатами v) до s степеней свободы (в соответствии с числом обобщенных координат Z и соответствующих предполагаемых форм). Уравнение (13.80) является уравнением преобразования координат, а соотношения (13.87) — матрицами обобщенных масс и жесткостей (размера $s \times s$). Каждый элемент этих матриц характеризует обобщенную массу или жесткость:

$$k_{mn}^* = \Psi_m^T k \Psi_n; \quad (13.89a)$$

$$m_{mn}^* = \Psi_m^T m \Psi_n. \quad (13.89b)$$

В общем случае формы Ψ_n не обладают свойством ортогональности к истинным формам колебаний. Поэтому недиагональные члены в этих матрицах обобщенных масс и жесткостей не равны нулю. Однако удачный выбор предполагаемых форм колебаний позволяет получить для этих недиагональных членов сравнительно небольшие значения. В любом случае намного легче определить динамическую реакцию для уменьшенного числа координат s , чем для N первоначальных уравнений.

Для решения уравнения (13.88) может быть использован любой стандартный метод решения задачи о собственных значениях, в том числе метод решения уравнения для определителя, рассмотренный ранее для систем с небольшим числом обобщенных координат Z . Определенный таким образом вектор частоты ω характеризует приближенную оценку истинных частот низших форм свободных колебаний, обычно точность достаточно высока для низших форм ($1 < n < s/2$) и сравнительно низка для высших форм. Если векторы форм колебаний Z_n нормированы делением на некоторую координату, то они обозначаются φ_{Zn} , где нижний индекс Z обозначает, что они относятся к формам колебаний, выраженным в обобщенных координатах. Полная система векторов в обобщенных координатах принимается в виде квадратной матрицы Φ_Z размером $s \times s$.

Обобщенные координаты Z , выраженные через модальные амплитуды по аналогии с (12.2), равны:

$$Z = \Phi_Z Y. \quad (13.90)$$

Интересно отметить, что эти формы колебаний ортогональны матрицам масс и жесткостей

$$\varphi_{Zm} m^* \varphi_{Zn} = 0, \quad \varphi_{Zm} k^* \varphi_{Zn} = 0, \quad m \neq n. \quad (13.91)$$

После подстановки (13.90) в (13.80) геометрические координаты можно выразить через нормальные координаты

$$v = \Psi \Phi_Z Y. \quad (13.92)$$

Таким образом, приближенные формы колебаний в геометрических координатах равны произведению предполагаемых форм на формы колебаний в обобщенных координатах

$$\Phi = \Psi \Phi_Z. \quad (13.93)$$

Здесь матрица Φ размера $N \times s$.

Подставляя выражения (13.87) в (13.91) и используя (13.92), получаем, что приближенные формы колебаний в геометрических координатах ортогональны выраженным в тех же координатах матрицам масс и жесткостей. Поэтому их можно использовать в стандартном методе сложения форм собственных колебаний.

Следует помнить, что улучшение процедуры расчета по методу Релея также применимо к методу Релея — Ритца. Тогда по аналогии

с (13.79) улучшенные матрицы обобщенных жесткостей и масс вместо (14.87) равны:

$$k^* = \Psi^T \tilde{m} \tilde{m} \Psi; \quad (13.94a)$$

$$m^* = \Psi^T \tilde{m} \tilde{m} \tilde{m} \Psi. \quad (13.94b)$$

Главная особенность этих уравнений состоит в том, что прогибы от инерционных сил позволяют из очень грубых начальных приближений получить достаточно близкие предполагаемые формы колебаний. Для больших сложных систем очень трудно получить в детальной форме оценки для форм колебаний и поэтому с помощью улучшенного метода достаточно просто определить общий вид каждой формы. Другим большим преимуществом метода является возможность во многих случаях избежать вычисления матрицы жесткостей. Действительно, если обозначить начальные формы $\Psi^{(0)}$, а прогибы от инерционных сил по этим формам $\Psi^{(1)}$,

$$\Psi^{(1)} = \tilde{m} \Psi^{(0)}, \quad (13.95)$$

то уравнения (14.94) могут быть записаны в виде:

$$k^* = (\Psi^{(1)})^T m \Psi^{(0)}; \quad (13.96a)$$

$$m^* = (\Psi^{(1)})^T m \Psi^{(1)}. \quad (13.96b)$$

Следовательно, нет необходимости выводить выражения для единичных перемещений, нужно только уметь вычислять прогибы от заданных нагрузок (которые в этом случае равны $m \Psi^{(0)}$).

Этот улучшенный процесс в методе Релея—Ритца можно рассматривать как первый цикл итеративного решения точно так же, как улучшенный метод Релея эквивалентен отдельному циклу метода Стодолы. Однако анализ по методу Стодолы приводит к определению только одной частоты и формы колебаний, между тем как развитый Ритцем метод позволяет найти сразу усеченную систему собственных чисел и векторов. Этот метод, который называется *параллельной итерацией или итерацией подпространства*, вместе с другими методами итерации матриц рассматривается в разд. 13.6.

13.6. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ИТЕРАЦИИ МАТРИЦ

13.6.1. Расширение собственных значений динамической матрицы. Методы Стодолы и Вианелло — простые примеры приложения общих принципов к итерационным методам решения задачи о собственных значениях. Хотя детальное рассмотрение этого вопроса выходит за пределы настоящей книги, полезно остановиться на принципах итерации матриц при решении задач колебания сооружений. Одним из фундаментальных методов, полезных в дальнейшем, является расширение свойств матриц в терминах собственных чисел и соответственных векторов.

С этой целью запишем (13.43) в виде

$$E \varphi_n = \varphi_n \lambda_n. \quad (13.97)$$

где $\lambda_n \equiv \omega_n^2$.

Из метода решения задачи о собственных значениях с помощью уравнения определителя видно, что собственные значения транспонированной матрицы совпадают с их величинами для первоначальной матрицы. Однако собственные векторы транспонированной несимметричной матрицы типа E отличаются от собственных векторов первоначальной матрицы. Отсюда определение собственных значений транспонированной матрицы E^T можно записать в виде

$$E^T \varphi_{Ln} = \varphi_{Ln} \lambda_n,$$

где φ_{Ln} — n -й собственный вектор матрицы E^T .

После транспонирования этого равенства получим:

$$\varphi_{Ln}^T E = \lambda_n \varphi_{Ln}^T. \quad (13.98)$$

Собственные векторы φ_{Ln} часто называют *левосторонними собственными векторами* матрицы E , а φ_n — *правосторонними векторами*.

Условие ортогональности для лево- и правосторонних векторов можно легко установить, если выражения (13.97) умножить слева на собственный вектор φ_{Lm}^T

$$\varphi_{Lm}^T E \varphi_n = \varphi_{Lm}^T \varphi_n \lambda_n, \quad (13.99)$$

а соотношение (13.98), записанное для формы m , умножением справа на φ_n

$$\varphi_{Lm}^T E \varphi_n = \lambda_m \varphi_{Lm}^T \varphi_n. \quad (13.100)$$

Вычитая (13.100) из (13.99), получаем:

$$0 = (\lambda_n - \lambda_m) \varphi_{Lm}^T \varphi_n,$$

что приводит к условию ортогональности

$$\varphi_{Lm}^T \varphi_n = 0; \quad \lambda_m \neq \lambda_n. \quad (13.101)$$

Если собственные векторы нормированы так, чтобы удовлетворялось условие $\varphi_{Ln}^T \varphi_n = 1$ (обратите внимание, что оно не определяет специально амплитуду φ_{Ln} или φ_n , а только их произведение), и если квадратные матрицы для всех право- и левосторонних собственных векторов обозначить соответственно Φ и Φ_L , то после нормирования и использования условий ортогональности получим:

$$\Phi_L^T \Phi = I. \quad (13.102a)$$

Отсюда транспонированная матрица левосторонних собственных векторов равна матрице, обратной матрице правосторонних собственных векторов,

$$\Phi_L^T = \Phi^{-1}. \quad (13.102b)$$

Теперь расширение матрицы E можно записать в виде выражения (13.97) применительно к задаче о собственных значениях для полной системы собственных векторов и чисел

$$E\Phi = \Phi\Lambda, \quad (13.103)$$

где Λ — диагональная матрица собственных чисел.

Умножая выражение (13.103) слева на Φ_L^T , с учетом (13.1026) получаем выражение для собственных чисел

$$\Phi_L^T E\Phi = \Lambda. \quad (13.104)$$

С другой стороны, E может быть получено в виде собственных чисел и собственных векторов путем умножения (13.104) слева на Φ и справа на Φ_L^T с учетом (13.1026):

$$E = \Phi\Lambda\Phi_L^T. \quad (13.105)$$

Этот результат может быть также представлен в виде суммы модальных составляющих

$$E = \sum_{n=1}^N \lambda_n \Phi_n \Phi_{Ln}^T. \quad (13.105a)$$

Квадрат матрицы E равен:

$$E^2 = \Phi\Lambda\Phi_L^T\Phi\Lambda\Phi_L^T = \Phi\Lambda^2\Phi_L^T, \quad (13.106)$$

а матрица E в степени s

$$E^s = \Phi\Lambda^s\Phi_L^T. \quad (13.107)$$

Следует помнить, что расширение выражения (14.107) основано на нормировании собственных векторов ($\Phi_L^T\Phi = I$). Специальное выражение для левосторонних собственных векторов может быть получено, если введено особое условие нормирования. Например, если выражение (13.103) умножено слева на $\Phi^T m$ (отметим, что $E = m^{-1}k$), то

$$\Phi^T k\Phi = \Phi^T m\Phi\Lambda. \quad (13.108)$$

Если теперь правосторонние собственные векторы нормированы так, что

$$\Phi^T m\Phi = I, \quad (13.109)$$

то из сравнения транспонированного выражения (13.102a) с (13.109) и (13.108) получим:

$$\Phi_L = m\Phi = k\Phi\Lambda^{-1}. \quad (13.110)$$

13.6.2. Итерационное решение задачи о собственных значениях. Уравнение (13.107) дает возможность получить общий метод итерации матриц для определения собственных чисел и векторов динамической матрицы E . Для получения метода *прямого анализа* необходимо ввести предпосылку о векторе высшей формы колебаний $v_N^{(0)}$,

которому соответствует высшая частота. Пробный вектор можно выразить в виде суммы компонент истинного вектора [см. уравнение (13.13)]:

$$v_N^{(0)} = \sum_{n=1}^N \varphi_n Y_n = \Phi Y. \quad (13.111)$$

Процесс итерации начинается с вычисления в два этапа улучшенного вектора $v_N^{(1)}$. Сначала определяется улучшенная форма из произведения матриц

$$\bar{v}_N^{(1)} = E v_N^{(0)},$$

а затем его амплитуда нормируется делением на наибольшую компоненту

$$v_N^{(1)} = \frac{\bar{v}_N^{(1)}}{\max(\bar{v}_N^{(1)})} = \frac{E v_N^{(0)}}{\max(E v_N^{(0)})}. \quad (13.112)$$

Результат для следующего цикла итерации приводит к выражению

$$v_N^{(2)} = \frac{E v_N^{(1)}}{\max(E v_N^{(1)})} = \frac{E^2 v_N^{(0)}}{\max(E^2 v_N^{(0)})}, \quad (13.113)$$

а после s циклов

$$v_N^{(s)} = \frac{E^s v_N^{(0)}}{\max(E^s v_N^{(0)})}. \quad (13.114)$$

После подстановки (13.107) и (13.111) в (13.114) получаем:

$$v_N^{(s)} = \frac{\Phi\Lambda^s\Phi_L^T\Phi Y}{\max(E^s v_N^{(0)})} = \frac{\Phi\Lambda^s Y}{\max(E^s v_N^{(0)})} = \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n^s \Phi_n Y_n}{\max(E^s v_N^{(0)})}$$

или с учетом выражения для суммы

$$v_N^{(s)} = \frac{\lambda_N^s}{\max(E^s v_N^{(0)})} \left[\Phi_N Y_N + \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_N} \right)^s \Phi_n Y_n \right]. \quad (13.115)$$

Поскольку по определению $\lambda_N > \lambda_{N-1} > \lambda_{N-2} \dots$, каждый член суммы становится бесконечно малым после выполнения достаточного числа циклов итерации. Следовательно, вычисленная форма колебаний должна в результате сходиться к

$$v_N^{(s)} = \frac{\lambda_N^s \Phi_N Y_N}{\max(\lambda_N^s \Phi_N Y_N)} = \frac{\Phi_N}{\max(\Phi_N)} \equiv \Phi_N, \quad (13.116)$$

где, как отмечалось, каждый вектор нормирован так, что его наибольшая компонента равна единице.

Если процесс итерации продолжить еще на один шаг

$$\bar{v}_N^{(s+1)} = E v_N^{(s)} = \Phi \Lambda \Phi^T \frac{\Phi_N}{\max(\Phi_N)} = \lambda_N \frac{\Phi_N}{\max(\Phi_N)},$$

то собственное значение для высшей формы колебаний определяется наибольшей компонентой собственного вектора перед нормированием

$$\lambda_N = \max(\bar{v}_N^{(s+1)}). \quad (13.117)$$

Рассмотренный алгоритм свидетельствует о сходимости прямого итерационного процесса к высшей форме и частоте собственных колебаний. Эквивалентный процесс, в рамках которого достигается сходимость к низшей форме, называется *обратной итерацией*. При этом в качестве первоначального вектора $v^{(0)}$ принимается предположение о низшей форме колебаний, а процесс итерации включает перемножение пробного вектора на обратную матрицу E^{-1} . Тогда после первого цикла с учетом нормирования получаем:

$$v_1^{(1)} = \frac{E^{-1} v^{(0)}}{\max(E^{-1} v^{(0)})}, \quad (13.118)$$

а после s циклов по аналогии с методом прямой итерации [см. (13.115)] можно получить перемещение в виде

$$v_1^{(s)} = \frac{\lambda_1^{-s}}{\max(E^{-s} v^{(0)})} \left[\Phi_1 Y_1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^s \Phi_n Y_n \right]. \quad (13.119)$$

Поскольку по определению $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$ каждый из членов суммы становится после достаточного числа циклов бесконечно малым и вычисляемая форма сходится к

$$v_1^{(s)} = \frac{\Phi_1}{\max(\Phi_1)} = \Phi_1. \quad (13.120)$$

Так же, как и в предыдущем методе, собственное число определяется соотношением

$$\lambda_1 = \frac{1}{\max(\bar{v}_1^{(s+1)})}. \quad (13.121)$$

В качестве последнего пояснения к рассмотренным вопросам следует указать, что обратная итерация для матрицы $E = m^{-1}k$ эквивалентна *прямой* итерации для матрицы $E^{-1} = D = \tilde{m}$, прямой итерационный процесс будет сходиться к частоте низшей формы собственных колебаний, как показано раньше для метода Стодолы. Однако при анализе сложных систем строительных конструкций часто бывает более удобным выполнять расчеты для матрицы E , выраженной в величинах жесткостей, чем с матрицей D , представляющей собой единичные перемещения. Поэтому решение задач методом обратной итерации оказывается более эффективным.

13.6.3. Итерация со сдвигом в системе координат. Итерационные методы, рассмотренные выше, представляют собой эффективные приемы вычисления частот низшей и высшей форм собственных колебаний строительных конструкций. Кроме того, они могут быть специально преобразованы для сходимости процессов при определении следующих за низшей или перед высшей форм колебаний, если влияние высшей или низшей формы исключено из пробного вектора (см. разд. 13.2). Однако определение необходимых замещающих матриц связано с большим объемом вычислений, и практика расчетов доказала преимущества альтернативного метода, основанного на

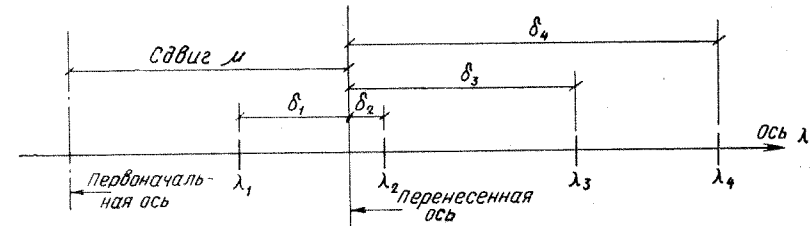


Рис. 13.10. Пример переноса осей при определении собственных значений

сдвиге собственных чисел. Хотя метод сдвига можно использовать как в рамках прямой, так и обратной итерации, последняя процедура оказывается более эффективной и будет рассмотрена ниже.

Принцип метода сдвига заключается в представлении каждого собственного значения λ_n в виде суммы сдвига μ и остаточной величины δ_n , т. е.

$$\lambda_n = \delta_n + \mu \quad (13.122)$$

или для полной диагональной матрицы собственных чисел

$$\Lambda = \hat{\delta} + \mu I, \quad (13.123)$$

где $\hat{\delta}$ — диагональная матрица, которая, как будет показано далее, аналогична для всех собственных чисел.

Сдвиг можно представить себе как перемещение начального значения по оси собственных чисел (рис. 13.10). Он предназначен для сведения задачи о собственных значениях к определению не истинных значений собственных чисел, а к анализу остаточных величин. Это следует из подстановки выражения (13.123) в (13.103):

$$E\Phi = \Phi[\hat{\delta} + \mu I],$$

которое можно представить в виде

$$[E - \mu I]\Phi = \Phi\hat{\delta}. \quad (13.124)$$

Здесь член в квадратных скобках характеризует модифицированную матрицу сдвинутых собственных чисел $\hat{\delta}$, которая для удобства обозначена \hat{E} . Тогда

$$\hat{E}\Phi = \Phi\hat{\delta}. \quad (13.125)$$

Очевидно, что выражение (13.125) в точности совпадает с (13.103) и матрица $\hat{\mathbf{E}}$ имеет те же собственные векторы, как и матрица \mathbf{E} .

Решение этой новой задачи о собственных значениях выполняется методом обратной итерации. По аналогии с (13.118) первый цикл процесса вычислений может быть представлен в форме

$$\mathbf{v}_m^{(1)} = \frac{\hat{\mathbf{E}}^{-1} \mathbf{v}_m^{(0)}}{\max(\hat{\mathbf{E}}^{-1} \mathbf{v}_m^{(0)})},$$

где $\mathbf{v}_m^{(0)}$ — начальное приближение для формы колебаний m . В результате после s циклов вычислений получим:

$$\mathbf{v}_m^{(s)} = \frac{\hat{\mathbf{E}}^{-s} \mathbf{v}_m^{(0)}}{\max(\hat{\mathbf{E}}^{-s} \mathbf{v}_m^{(0)})} = \frac{\sum_{n=1}^N \delta_n^{-s} \varphi_n Y_n}{\max(\hat{\mathbf{E}}^{-s} \mathbf{v}_m^{(0)})}$$

или

$$\mathbf{v}_m^s = \frac{\delta_m^{-s}}{\max(\hat{\mathbf{E}}^{-s} \mathbf{v}_m^{(0)})} \left[\varphi_m Y_m + \sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{\delta_m}{\delta_n} \right)^s \varphi_n Y_n + \sum_{n=m+1}^N \left(\frac{\delta_m}{\delta_n} \right)^s \varphi_n Y_n \right], \quad (13.126)$$

где δ_m — наименьшее значение остаточного собственного вектора, т. е.

$$|\delta_m| < \delta_{m+1} < \delta_{m+2} \dots \text{ и } |\delta_m| < -\delta_{m-1} < -\delta_{m-2} \dots$$

Очевидно, что две суммы в выражении (13.126) становятся бесконечно малыми величинами после достаточного числа циклов итерации и вычисляемая форма колебаний сходится к

$$\mathbf{v}_m^{(s)} = \frac{\delta_m^{-s} \varphi_m Y_m}{\max(\delta_m^{-s} \varphi_m Y_m)} = \frac{\varphi_m}{\max(\varphi_m)} = \varphi_m. \quad (13.127)$$

Рассмотренный метод расчета показывает, что результаты при применении процесса итерации при сдвиге собственных чисел сходятся к форме колебаний, для которой собственное число близко к положению сдвига, например для случая на рис. 13.10 ко второй форме колебаний. По аналогии с (13.121) можно отметить, что собственное число в новой системе отсчета для выбранной формы колебаний определяется максимальной компонентой вычисленного собственного вектора перед нормированием

$$\delta_m = \frac{1}{\max(\bar{\mathbf{v}}_m^{(s+1)})}.$$

Тогда истинное собственное число определяется в виде суммы

$$\lambda_m = \mu + \frac{1}{\max(\bar{\mathbf{v}}_m^{(s+1)})}. \quad (13.128)$$

При соответствующем выборе точек сдвига метод обратной итерации может быть преобразован так, что обеспечивается сходимость к каждой или ко всем формам колебаний конструкций. Поскольку сходимость может быть ускорена путем выбора точки сдвига, близкой к искомому корню, удобно в процессе итерации назначать интервалы точек сдвига для получения оценок определенных корней. Для аппроксимации точек сдвига из (13.10) может быть получена следующая формула:

$$\mu_m = \frac{\bar{\mathbf{v}}_m^{(s)} \mathbf{m} \bar{\mathbf{v}}_m^{(s-1)}}{\bar{\mathbf{v}}_m^{(s)} \bar{\mathbf{m}} \bar{\mathbf{v}}_m^{(s)}}. \quad (13.129)$$

Метод сдвига менее удобен при процессе прямой итерации, при применении которого результаты должны сходиться к наибольшему корню, поскольку только первое или последнее значение в новой системе координат δ_1 или δ_N могут достигнуть максимальной величины. В процессе обратной итерации, выбрав обоснованную точку сдвига, для любой формы колебаний можно получить минимальное значение собственного числа δ_m .

Путем незначительной модификации обратного итерационного процесса удастся добиться существенного преимущества для определенных видов систем строительных конструкций. Рассмотрим уравнение собственных колебаний в виде (11.33)

$$\mathbf{k} \varphi_n = \omega_n^2 \mathbf{m} \varphi_n.$$

Введение значения сдвига собственного числа $\mu = \omega_n^2 - \delta_n$ приводит к выражению $\mathbf{k} \varphi_n = (\mu + \delta) \mathbf{m} \varphi_n$, которое может быть преобразовано к следующему:

$$(\mathbf{k} - \mu \mathbf{m}) \varphi_n = \delta_n \mathbf{m} \varphi_n. \quad (13.130)$$

Если это выражение умножим слева на \mathbf{m}^{-1} , получим (13.24), так как $\mathbf{E} = \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k}$. Когда матрицы \mathbf{m} и \mathbf{k} содержат ограниченное число недиагональных членов (как часто бывает для моделей метода МКЭ), объем вычислений может быть значительно сокращен при прямом определении выражения (13.130). Отметим, что матрица $\mathbf{E} = \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k}$ будет достаточно заполненной, даже если матрицы \mathbf{m} и \mathbf{k} имеют ограниченное число элементов.

Для итерации с использованием (13.130) сначала назначают пробный вектор $\mathbf{v}_n^{(0)}$ и умножают его на матрицу масс, чтобы получить пробный вектор в виде $\mathbf{w}_n^{(0)} \equiv \mathbf{m} \mathbf{v}_n^{(0)}$. Тогда итерационная форма для выражения (13.130) принимает вид

$$\hat{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{v}}_n^{(1)} = \mathbf{m} \bar{\mathbf{v}}_n^{(0)} = \mathbf{w}_n^{(0)}, \quad (13.131)$$

где $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k} - \mu \mathbf{m}$ — матрица жесткости с учетом сдвига.

Наконец, при решении этого уравнения относительно улучшенного собственного вектора по аналогии с (13.118) получают:

$$\bar{\mathbf{v}}_n^{(1)} = \frac{\hat{\mathbf{k}}^{-1} \mathbf{w}_n^{(0)}}{\max(\hat{\mathbf{k}}^{-1} \mathbf{w}_n^{(0)})}. \quad (13.132)$$

При решении уравнения (13.132) в полной мере используются преимущества структуры матрицы \hat{k} (которая по структуре аналогична матрице k в нормальных координатах). Вместо прямого обращения матрицы \hat{k} более эффективное решение может быть получено с помощью принципа разложения Холецки. При этом матрица жесткостей представляется в виде

$$\hat{k} = LL^T, \quad (13.133)$$

где L — нижняя треугольная матрица.

Теперь улучшенный безразмерный вектор находят в два этапа: сначала определяют $y^{(0)}$ из $Ly_n^{(0)} = w_n^{(0)}$ (прямая редукция), а затем $\bar{v}^{(1)}$ из $L^T \bar{v}^{(1)} = y_n^{(0)}$ (обратная подстановка), где решение для каждого этапа легко выполняется в связи с тем, что L — треугольная матрица.

Обратная итерация в форме (13.132) для получения $w_n = mv_n$ требует дополнительного перемножения матриц в каждом итерационном цикле [по сравнению с (13.118)]. Поэтому такой вариант расчета рационален только тогда, когда матрица жесткостей \hat{k} ленточная, с тем чтобы повышенная эффективность процесса компенсировала необходимость выполнения дополнительной матричной операции.

13.6.4. Итерация подпространства. При итерационном процессе вычисления матриц предполагалось, что одновременно рассматривается только один модальный вектор. Тем не менее методику можно развить на случай одновременных операций с любым необходимым числом векторов. В такой постановке итерационный процесс может рассматриваться как развитие улучшенной методики Релея — Ритца. Поэтому при рассмотрении метода расчета удобно воспользоваться обозначениями, принятыми для метода Ритца.

Для точного определения p форм и частот собственных колебаний системы целесообразно начать вычисления с несколько большего числа q пробных векторов. Эти векторы обозначим с верхним индексом (0), тогда перемещения можно представить в виде композиции векторов [см. выражение (13.80)]:

$$v^{(0)} = \Psi^{(0)} Z^{(0)} = \Psi^{(0)}, \quad (13.134)$$

где начальная матрица обобщенных координат является единичной матрицей (это указывает на то, что пробные векторы приняты в виде форм колебаний $\Psi^{(0)}$ по методу Ритца).

Для больших систем, применительно к которым этот метод обычно принимается, очень важно использовать преимущества структуры матриц масс и жесткостей. Поэтому уравнение свободных колебаний записывается в виде (11.33) и для системы из p собственных чисел и собственных векторов

$$k\Phi = m\Phi\Lambda. \quad (13.135)$$

Подставляя q пробных векторов в правую часть этого уравнения, получаем:

$$k\bar{\Psi}^{(1)} = m\Psi^{(0)} \equiv w^{(0)}, \quad (13.136)$$

которое эквивалентно выражению (13.133), записанному для ряда векторов без учета сдвига. Безразмерные, улучшенные формы колебаний получаются из решения уравнения (13.136):

$$\bar{\Psi}^{(1)} = k^{-1} w^{(0)}. \quad (13.137)$$

Как указывалось выше, при вычислении этих векторов более целесообразно использовать принцип разложения Холецки для матрицы k [см. выражение (13.133)], чем ее обращение в процессе получения решения.

Перед применением исправленных форм (13.137) в новом итерационном цикле они должны быть преобразованы в двух направлениях: нормированы для оперирования в процессе вычислений величинами с относительно небольшим числом значащих цифр и приведены к ортогональному виду так, чтобы каждый вектор сходил к определенной форме (а не все векторы сходились к нижней форме). Эти преобразования могут быть выполнены различными методами, но удобнее всего для обеих операций воспользоваться методом Ритца при решении задачи о собственных значениях. Тогда матрицы жесткостей и масс в обобщенных координатах в первом цикле вычислений [см. выражения (13.87)] имеют вид:

$$\begin{aligned} k_1^* &= \bar{\Psi}^{(1)T} k \bar{\Psi}^{(1)} \equiv \bar{\Psi}^{(1)T} m \Psi^{(0)}; \\ m_1^* &= \bar{\Psi}^{(1)T} m \bar{\Psi}^{(1)}, \end{aligned} \quad (13.138)$$

где верхние индексы обозначают величины в первом цикле процесса. Тогда соответствующая задача о собственных значениях

$$k_1^* \hat{Z}^{(1)} = m_1^* \hat{Z}^{(1)} \Omega_1^2 \quad (13.139)$$

решается относительно форм колебаний $\hat{Z}^{(1)}$ и частот Ω_1^2 в обобщенных координатах. Для решения уравнения (13.139) можно использовать любой метод определения собственных значений, но поскольку число уравнений системы намного меньше числа первоначальных собственных значений ($q \ll N$), обычно пользуются стандартными программами, имеющимися в любом вычислительном центре. Модальный вектор в обобщенных координатах обычно нормируется так, что $\hat{Z}^{(1)T} m_1^* \hat{Z}^{(1)} = 1$. При использовании нормированных векторов в обобщенных координатах улучшенные пробные векторы имеют вид

$$v^{(1)} = \Psi^{(1)} = \bar{\Psi}^{(1)} \hat{Z}^{(1)}. \quad (13.140)$$

Теперь полный процесс может быть повторен в итерационной форме и приводит к выражениям безразмерных улучшенных форм $\bar{\Psi}^{(2)}$ [см. выражение (13.137)], а затем к решению соответствующей задачи Ритца о собственных значениях [см. (13.139)], включая нор-

мирование и ортогонализацию: $\Psi^{(2)} = \bar{\Psi}^{(2)} \hat{Z}^{(2)}$ и т. д. Этот процесс сходится к истинным формам и частотам собственных колебаний

$$\Psi^{(s)} \rightarrow \Phi,$$

$$\Omega_{(s)}^2 \rightarrow \Lambda, \text{ когда } s \rightarrow \infty. \quad (13.141)$$

В принципе сходимость к низшим формам колебаний достигается скорее, и процесс продолжается до тех пор, пока с необходимой точностью не будут определены желаемые p форм. Дополнительные $q - p$ пробных векторов включают в расчет, поскольку они ускоряют процесс сходимости, но их наличие, безусловно, повышает объем вычислений в каждом цикле. Поэтому необходимо обеспечивать разумное соотношение между числом используемых векторов и числом циклов для сходимости процесса вычислений. Опыт показал, что наилучший выбор определяется меньшей из двух величин $q = 2p$ и $q = p + 8$.

Этот метод итерации подпространства зарекомендовал себя как один из наиболее эффективных методов при решении задач о колебаниях систем большого порядка, для которых необходимо рассмотрение не более порядка сорока форм колебаний в системах с числом степеней свободы от нескольких сотен до нескольких тысяч. Хотя эти результаты можно получить при уменьшении числа координат в методе Релея—Ритца, большим преимуществом этого метода является определение модальных координат с любой желаемой степенью точности. Все другие методы уменьшения числа координат предусматривают приближения, которые снижают точность окончательных результатов. Поэтому метод итерации подпространства настоятельно рекомендуется для использования в практике вычислений.

13.7. СИММЕТРИЧНАЯ ФОРМА ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ

В рассмотренных методах обратной итерации уравнение свободных колебаний

$$k\varphi_n = m\varphi_n \lambda_n \quad (13.142)$$

преобразовывалось умножением слева на m^{-1} для приведения к задаче о собственных значениях [см. выражение (13.97)]:

$$E\varphi_n = \varphi_n \lambda_n.$$

Проведен анализ ряда эффективных методов решения этой задачи. Однако следует отметить, что матрица $E = m^{-1}k$ будет несимметричной даже в том случае, если обе матрицы m и k симметричные. Тогда эта задача не может быть решена многими стандартными методами, разработанными с учетом симметрии задачи о собственных значениях, например методом Хаусхолдера. По этой причине целесообразно уметь преобразовывать общую задачу о собственных значениях [см. (13.142)] к стандартной симметричной форме

$$B y_n = y_n \lambda_n. \quad (13.143)$$

Преобразование от общей формы к стандартной возможно путем изменения матрицы масс, причем вид необходимого преобразования зависит от структуры матрицы. Рассмотрим два случая: диагональную матрицу масс, характеризующую систему с сосредоточенными массами, и общую (недиагональную) матрицу масс, которая может быть результатом формулирования задачи в методе МКЭ или матрицей обобщенных масс в методе Релея—Ритца. Для обоих случаев преобразование матрицы, которое приводит выражение (13.142) к (13.143), получается разложением матрицы масс в произведение матрицы и транспонированной матрицы.

13.7.1. Диагональная матрица масс. В этом случае матрица преобразования принимается в виде квадратного корня из матрицы масс, так как $m = m^{1/2} m^{1/2}$, и матрица степени $1/2$ получается извлечением квадратных корней из диагональных членов (как известно, диагональная матрица при транспонировании не изменяется). Преобразование уравнения (13.142) сводится к следующему выражению для собственных векторов

$$\varphi_n = m^{-1/2} y_n, \quad (13.144)$$

где обратная матрица образована из обратных величин диагональных членов в матрице $m^{1/2}$. Подставляя (13.144) в (13.142) и умножая слева на $m^{-1/2}$, получаем:

$$m^{-1/2} k m^{1/2} y_n = y_n \lambda_n, \quad (13.145)$$

что эквивалентно уравнению (13.143) при $B = m^{-1/2} k m^{-1/2}$. Решение этой симметричной задачи о собственных значениях непосредственно приводит к определению частот первоначального уравнения (13.142). Собственные векторы y_n новой задачи о собственных значениях для получения форм собственных колебаний φ_n должны быть преобразованы с помощью выражения (13.144).

Безусловно, рассмотренное преобразование нельзя использовать, если один из диагональных членов матрицы масс равен нулю. Поэтому такие степени свободы необходимо исключить из анализа с помощью статического уплотнения [см. выражение (13.70)] перед преобразованием задачи к стандартной симметричной форме.

13.7.2. Матрица приведенных масс. Разработаны два метода для преобразования матриц, если матрица масс имеет структуру, отличную от диагональной. Наиболее рациональный из них основан на вычислении собственных чисел v_n и собственных векторов t_n матрицы масс из уравнения $m t_n = t_n v_n$. Собственные векторы этой симметричной матрицы удовлетворяют условию ортогональности $t_m^T t_n = 0$ (при $m \neq n$). Если они нормированы так, что $t_m^T t_m = 1$, то полная система собственных векторов T ортонормирована:

$$T^T T = I, \quad T^T = T^{-1}.$$

Это выражение соответствует условию (13.102a). Отметим, что левые и правосторонние собственные векторы для симметричной матрицы

одинаковы. Тогда матрица масс может быть выражена через эти собственные векторы и систему собственных чисел $\hat{\mathbf{v}}$ [по аналогии с выражением (13.105)],

$$\mathbf{m} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{v}}\mathbf{T}^T. \quad (13.146)$$

Из выражения (13.146) видно, что матрица преобразования равна $\mathbf{T}\hat{\mathbf{v}}^{1/2}$, и поэтому выражение (13.142) преобразуют с помощью собственных векторов

$$\varphi_n = \mathbf{T}\hat{\mathbf{v}}^{-1/2} \mathbf{y}_n. \quad (13.147)$$

Подставляя соотношение в (13.142) и умножая его слева на $\hat{\mathbf{v}}^{-1/2}\mathbf{T}^T$, получим:

$$(\hat{\mathbf{v}}^{-1/2} \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} \hat{\mathbf{v}}^{-1/2}) \mathbf{y}_n = \mathbf{y}_n \lambda_n. \quad (13.148)$$

для упрощения правой части которого использовано выражение (13.146). Уравнение (13.148) эквивалентно (13.143) при $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{v}}^{-1/2}\mathbf{T}^T\mathbf{k}\mathbf{T}\hat{\mathbf{v}}^{-1/2}$. Следовательно, решение этой симметричной задачи о собственных значениях непосредственно приводит к нахождению искомым частот собственных колебаний, а формы колебаний определяются собственными векторами \mathbf{y}_n с помощью выражения (13.147).

Поскольку это преобразование требует предварительного решения задачи о собственных значениях размерностью, равной первоначальной задаче, очевидно, что использование при анализе колебаний решения симметричной задачи (13.143) о собственных значениях будет очень трудоемким, если матрица масс недиагональная. Более простое преобразование возможно при использовании метода разложения Холески для матрицы масс

$$\mathbf{m} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T,$$

где \mathbf{L} — нижняя треугольная матрица, эквивалентная матрице при разложении \mathbf{k} в соответствии с выражением (13.133).

Тогда преобразование можно выполнить, как показано выше, принимая вместо $\mathbf{T}\hat{\mathbf{v}}^{-1/2}$ [в (13.147)] или $\mathbf{m}^{-1/2}$ [в (13.144)] величину $(\mathbf{L}^T)^{-1}$. Однако, как показали практические расчеты, задача при использовании метода Холески является очень чувствительной и трудно решаемой с достаточной степенью точности. По этой причине в общем случае более предпочтительно будет разложение собственного вектора в форме (13.146), несмотря на увеличение объема вычислений.

13.8. АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ СИСТЕМ (НЕ ИМЕЮЩИХ СВЯЗЕЙ)

Свободные или частично свободные системы, для которых перемещения не ограничены или только частично ограничены связями, представляют специальный класс систем при анализе колебаний. Они вносят специфические особенности в методы расчета, поскольку

матрица жесткостей становится «особенной» и «частоты» колебаний системы как жесткого тела равны нулю. Хотя методы раскрытия определителя (и другие формальные математические решения) непосредственно применимы к динамическим системам с особенными матрицами жесткости, метод Стодолы и другие методы, связанные с обращением матрицы жесткости, не могут быть использованы без предварительных преобразований. Рассмотрим три простейших способа, как избежать трудностей при использовании особенной матрицы жесткости.

Самый простой метод исследования свободных систем заключается в добавлении упругих пружин для неограниченных степеней свободы. Сначала вводят минимальную систему ограничений для предотвращения колебаний системы как жесткого тела. Затем в случае размещения пружин между системами и основанием для каждой из указанных степеней свободы исключается особенность матрицы жесткости. В математической форме эти пружины характеризуют дополнительные члены в матрице жесткости, соответствующие этим степеням свободы. Если жесткость добавленной пружины очень мала по сравнению с коэффициентами первоначальной матрицы жесткости, то они оказывают незначительное влияние на частоты и формы свободных колебаний сооружения, связанные с его деформациями, а для форм колебаний жесткого тела определяемые частоты будут намного меньше частот, связанных с деформациями. Связи в виде ограничительных пружин можно вводить автоматически в программе расчета на ЭВМ, использующей при решении задачи о собственных значениях метод обратной итерации. Если выражения для жесткости определяются методом разложения Холески или Гаусса, особенность любой матрицы приводит к нулевому члену по диагонали и препятствует процессу дальнейшего разложения. Однако программу можно составить так, что каждый диагональный нулевой член заменяется малой величиной, которая физически характеризует жесткость пружины. Таким образом, можно исключить особенность матриц, и процесс разложения проводится до конца.

Аналогичный эффект может быть достигнут математическими преобразованиями путем введения сдвига к собственному числу. Из уравнения

$$[\mathbf{k} - \mu\mathbf{m}] \varphi_n = \delta_n \mathbf{m}\varphi_n \quad (13.130')$$

видно, что матрица жесткости $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k} - \mu\mathbf{m}$ будет неособенной в общем случае, даже если \mathbf{k} — особенная матрица. При диагональной матрице масс введение отрицательного сдвига характеризует добавление постоянной величины к диагональным элементам матрицы жесткости. Это эквивалентно введению пружины для каждой степени свободы. Существенное отличие этого метода от физического подхода, рассмотренного первым, заключается в том, что введение «пружины» учитывается в каждом коэффициенте матрицы масс, а не вводится как элемент системы пружин. Преимущества «метода сдвига» выражаются в том, что формы колебаний системы не изме-

няются, а изменение значения частоты точно определяется величиной сдвига.

Рассмотренные два способа хорошо применимы к расчету больших сложных систем с помощью ЭВМ. На современной ЭВМ расчеты выполняются с достаточным числом значащих цифр, что позволяет дополнительным искусственным пружинам задавать жесткость, по величине на несколько порядков меньшую действительных коэффициентов жесткости. В этом случае дополнительные пружины не окажут заметного влияния на динамические и деформационные характеристики системы. Однако для ручного счета, при котором учитывается ограниченное число значащих цифр и рассматриваются несколько степеней свободы, эффективен другой прием. По существу он является методом Ритца, в котором предполагаемые формы выбираются так, чтобы удовлетворялись условия динамического равновесия жесткого тела. При этом анализе все степени свободы разделяются на группу v_s , связанную с минимальными опорными связями, и группу оставшихся степеней свободы v_r , т. е.

$$v = \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}. \quad (13.149)$$

Перемещения системы как жесткого тела могут быть определены. Для свободного тела в трехмерном пространстве эти перемещения характеризуют поступательные перемещения вдоль каждой оси и повороты относительно этих осей. Если система имеет ограниченное число связей, то некоторые из этих перемещений исключаются. Обозначим эти перемещения системы как жесткого тела φ_s , где число столбцов соответствует числу элементов в v_s .

Соотношение между v_s и остальными степенями свободы определяется из условия динамического равновесия сил инерции при свободных колебаниях. Указанные силы инерции равны:

$$f_I = \omega^2 m v.$$

Расчленение матрицы масс в соответствии с выражением (13.149) дает:

$$f_I = \omega^2 [m_s \ m_r] \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix}. \quad (13.150)$$

Если эти силы инерции уравновешены, то производимая ими работа при любом перемещении твердого тела равна нулю. Следовательно, для всех движений жесткого тела можно записать

$$\varphi_s^T f_I = \varphi_s^T [m_s \ m_r] \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = 0, \quad (13.151)$$

откуда

$$\varphi_s^T m_s v_s + \varphi_s^T m_r v_r = 0. \quad (13.152)$$

Теперь зависимое перемещение «опоры» может быть выражено через остальные перемещения

$$v_s = - [\varphi_s^T m_s]^{-1} \varphi_s^T m_r v_r. \quad (13.153)$$

Наконец, вектор полных перемещений определяется через v_r с учетом (13.153) и единичной матрицы

$$v = \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\varphi_s^T m_s]^{-1} \varphi_s^T m_r \\ I \end{bmatrix} v_r \quad (13.154)$$

или в символической форме

$$v = S_r v_r, \quad (13.155)$$

где S_r — прямоугольная матрица преобразования в (13.154).

Теперь задача о собственных значениях может быть сформулирована для независимых степеней свободы v_r с использованием S_r в качестве стандартного преобразования метода Ритца. Другими словами, обобщенные массы и жесткости определяются соответственно выражениями:

$$m_r^* = S_r^T m S_r \text{ и } k_r^* = S_r^T k S_r$$

и редуцированная задача о собственных значениях

$$k_r^* \hat{v}_r = \omega^2 m_r^* \hat{v}_r \quad (13.156)$$

решается относительно форм \hat{v}_r и частот собственных колебаний. Перемещения вдоль зависимых степеней свободы \hat{v}_s определяются затем по выражению (13.153).

В заключение следует упомянуть, что равновесное состояние ограничений (13.151) может рассматриваться как условие ортогональности форм колебаний в процессе деформирования конструкций при перемещениях системы φ_s как жесткого тела. Тогда матрица преобразования S_r в соответствии с (13.155) представляет собой замещающую матрицу, которая исключает перемещения системы как жесткого тела из вектора v_r . По существу замещающие матрицы, удобные для анализа колебаний систем с достаточным числом опорных связей, могут быть получены с помощью выражения (13.154). При этом φ_s будут характеризовать m форм колебаний, которые уже определены для низших тонов, а v_s — первые m элементов вектора полных перемещений v . Для ручного счета такой вид замещающей матрицы может оказаться более удобным, чем выражение (13.42), поскольку порядок матриц снижается в соответствии с числом исключенных модальных составляющих. Тем не менее обращение матрицы $\varphi_s^T m_s$ при вычислении на логарифмической линейке требует больших усилий при определении более четырех-пяти форм колебаний.

В принципе уменьшение порядка задачи о собственных значениях введением ограничений в виде (13.154) полезно, если общее число степеней свободы мало (так что редуцируемые степени составляют значительную часть от общего числа степеней свободы). При анали-

зе больших систем уменьшение числа уравнений не представляет большого интереса. Преобразованная система (13.156) часто требует большего объема вычислений, так как при преобразовании утрачиваются преимущества структуры матриц k и m . Поэтому два метода, рассмотренные в начале раздела, как правило, более предпочтительны при разработке программ для систем большого порядка.

ГЛАВА 14

АНАЛИЗ НЕУПРУГИХ СИСТЕМ

14.1. ВВЕДЕНИЕ

Весь предшествующий анализ реакции систем со многими степенями свободы проводился в предположении, что сооружения являются упругими и динамические восстанавливающие силы для них могут быть определены с помощью линейных коэффициентов влияния через векторы ускорений, скоростей или перемещений. Учитывая указанное свойство характеристик системы, можно определить частоты и формы собственных колебаний и вычислить параметры реакции в виде модальных координат. Такой подход имеет очень большие преимущества, поскольку надежная оценка динамической реакции сооружений может быть получена при рассмотрении только нескольких форм колебаний даже для систем, которые содержат десятки и сотни степеней свободы. При этом объем вычислений может быть существенно сокращен.

Однако, как отмечалось при анализе систем с одной степенью свободы, характеристики сооружений в процессе динамической реакции не могут считаться постоянными. Коэффициенты жесткости способны изменяться вследствие появления текучести в элементах конструкций или при существенных изменениях осевых усилий (которое приводит к изменению коэффициентов геометрической жесткости). В процессе реагирования при динамическом воздействии могут также изменяться параметры масс и затухания. Любое такое изменение оказывает влияние на параметры колебания систем (по существу простое определение свободных колебаний уже неприменимо к неупругим системам), и разделение нормальных координат в уравнениях колебаний невозможно.

Единственным общим методом анализа произвольных неупругих систем является численный метод шагового интегрирования связанных систем уравнений. Методика расчета систем со многими степенями свободы может быть получена по аналогии с расчетом неупругих систем с одной степенью свободы, рассмотренным в гл. 7. Процесс реакции системы расчленяется на равные небольшие интервалы времени, и реакция для каждого интервала времени находится как для *линейной* системы с динамическими характеристиками, определенными в начале рассматриваемого интервала. В конце каж-

дого интервала характеристики изменяются в соответствии с текущим напряженным и деформированным состоянием. Таким образом, неупругий анализ рассматривается как последовательность расчета непрерывно меняющихся упругих систем.

Как отмечалось в гл. 7, шаговый метод интегрирования применим также к упругим системам и при его использовании значительно упрощаются вычисления, поскольку на каждом этапе не нужно учитывать изменение динамических характеристик. В ряде случаев использовать этот метод более предпочтительно, чем метод сложения форм колебаний, поскольку не требуется следить за изменением форм и частот колебаний. Как правило, прямой метод шагового интегрирования наиболее целесообразен при расчетах больших сложных систем для случаев кратковременного и импульсивного нагружения, когда одновременно возбуждаются много форм колебаний, но необходимо определить параметры реакции только для короткого промежутка времени.

Одна из возможных трудностей шагового интегрирования при вычислении реакции систем со многими степенями свободы заключается в том, что матрица затухания c может определяться в более сложной форме, чем параметры затухания колебаний по отдельным формам. Очень трудно бывает оценить коэффициенты затухания для полной матрицы диссипативных членов. Наиболее рациональный прием — предположение о величинах модальных параметров затухания для всех форм, оказывающих наибольшее влияние на параметры реакции, и вычисление ортогональной матрицы затухания, обладающей свойствами, рассмотренными в гл. 12.

С другой стороны, возможность определения матрицы в более сложной форме, чем с помощью модальных параметров затухания, является дополнительным преимуществом, повышающим общность шагового метода по сравнению с методом сложения форм колебаний. Нет необходимости определять компоненты параметров реакции, поэтому матрица масс может не удовлетворять условиям ортогональности для разных форм. В анализе можно использовать любую систему коэффициентов затухания, которые полностью отражают различные уровни диссипации энергии в разных элементах конструкций. Например, при анализе сейсмической реакции здания может оказаться полезным использовать коэффициенты затухания, характеризующие высокие значения параметров затухания для степеней свободы, которые связаны с деформациями основания, а для конструкций верхней части здания принять значительно меньшие значения.

Наконец, следует отметить, что преобразование к нормальным координатам может оказаться полезным также при расчете нелинейных систем. Безусловно, формы свободных недемпфированных колебаний позволяют разделить уравнения колебаний только для интервалов времени, в течение которых матрица жесткостей остается неизменной для рассматриваемых состояний системы. Как только характеристики жесткости изменяются в связи с появлением те-

кучести или других повреждений конструкций, преобразование к нормальным координатам будет приводить к появлению недиагональных членов в матрице обобщенных жесткостей, которые характеризуют взаимную связь уравнений реакции систем по разным формам. Тем не менее если неупругие деформации в сооружении не приводят к большим изменениям характера их прогибов, динамическая реакция по-прежнему может быть выражена в виде первоначальных форм недемпфированных колебаний. Поэтому часто бывает полезным определять реакцию сложных систем с помощью прямого метода шагового интегрирования ограниченного числа уравнений колебаний в нормальных координатах, даже если уравнения становятся связанными за счет появления существенной нелинейности в процессе реакции. Такой подход к анализу систем со связанными параметрами жесткости в нормальных координатах эквивалентен ранее предложенному методу расчета систем, для которых матрица затухания в нормальных координатах имеет перекрестные связи.

14.2. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ПРИРАЩЕНИЯХ

Уравнение, выражающее равновесие приращений сил в течение интервала времени Δt , может быть получено как матричное выражение, эквивалентное уравнению колебаний в приращениях для системы с одной степенью свободы [см. уравнение (7.2)]. Разность между условиями равновесия для моментов времени t и $t + \Delta t$ приводит к следующему выражению равновесия в приращениях:

$$\Delta f_I(t) + \Delta f_D(t) + \Delta f_S(t) = \Delta p(t). \quad (14.1)$$

Приращения сил в этом уравнении по аналогии с выражениями для системы с одной степенью свободы (7.3) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta f_I(t) &= f_I(t + \Delta t) - f_I(t) = m \Delta \ddot{v}; \\ \Delta f_D(t) &= f_D(t + \Delta t) - f_D(t) = c(t) \Delta \dot{v}(t); \\ \Delta f_S(t) &= f_S(t + \Delta t) - f_S(t) = k(t) \Delta v(t); \\ \Delta p(t) &= p(t + \Delta t) - p(t), \end{aligned} \quad (14.2)$$

где матрица масс m предполагается не изменяющейся во времени.

Элементы матриц приращений затухания и жесткости $c(t)$ и $k(t)$ определяются коэффициентами $c_{ij}(t)$ и $k_{ij}(t)$ для фиксированного момента времени. Характерное значение этих коэффициентов показано на рис. (14.1). Как отмечалось для коэффициентов системы с одной степенью свободы, удобнее в качестве меры параметров затухания и жесткости пользоваться начальным касательным углом наклона, а не секущим во избежание выполнения итерационного процесса на каждом шаге интегрирования. Тогда указанные коэффициенты определяются следующими выражениями:

$$c_{ij}(t) = \left(\frac{df_{Di}}{d\dot{v}_j} \right)_t; \quad k_{ij}(t) = \left(\frac{df_{Si}}{dv_j} \right)_t. \quad (14.3)$$

Если выражения (14.2) подставить в уравнение (14.1), то

$$m \Delta \ddot{v}(t) + c(t) \Delta \dot{v}(t) + k(t) \Delta v(t) = \Delta p(t). \quad (14.4)$$

Выражения для приращений сил в левой части уравнения (14.4) являются приближенными в связи с использованием начальных касательных величин для определения $c(t)$ и $k(t)$. Накопления ошибок вследствие этого обстоятельства можно избежать, если ускорение в

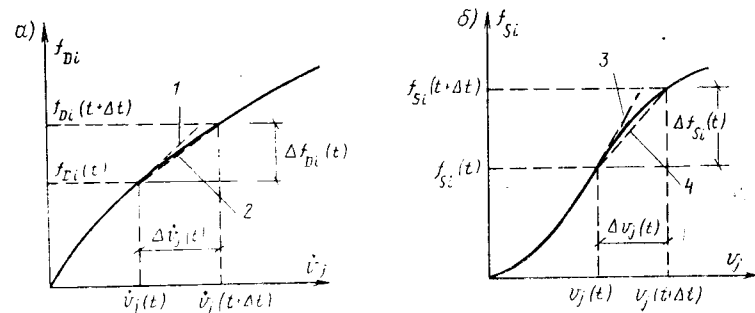


Рис. 14.1. Определение нелинейных коэффициентов влияния

а — нелинейное вязкое затухание c_{ij} ; б — нелинейная жесткость k_{ij} ; 1 и 2 — соответственно касательная и секущая составляющая затухания; 2 и 4 — касательная и секущая составляющая жесткости

начале каждого интервала времени определяется из условия общего равновесия сил для этого момента времени, как указано при рассмотрении систем с одной степенью свободы.

14.3. ШАГОВЫЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ — МЕТОД ЛИНЕЙНОГО УСКОРЕНИЯ

Основная операция при шаговом методе одновременного решения систем дифференциальных уравнений (14.4) представляет собой преобразование к системе алгебраических уравнений. Для этого вводят простое соотношение между перемещением, скоростью и ускорением, которое предполагается справедливым для короткого интервала времени. Тогда приращения скорости и перемещения могут быть выражены через приращения ускорения, и, наоборот, изменения скорости и ускорения — через приращения перемещений. В любом случае в уравнениях равновесия в приращениях остается только один неизвестный вектор, и он может быть вычислен с помощью стандартного метода одновременного решения системы уравнений.

Как указывалось при анализе систем с одной степенью свободы, зависимость между перемещением, скоростью и ускорением может быть получена из предположения о характере изменения вектора ускорения во времени. Для систем со многими степенями свободы удобно принять то же допущение о линейном изменении ускорения, которое использовалось в гл. 7 и приводит к изменению вектора ско-

рости по закону квадратной параболы, а вектора перемещений — по кубической параболе.

Последовательность анализа систем с многими степенями свободы выполняется точно так же, как указано в гл. 7, и по аналогии с выражениями (7.8) и (7.9) можно записать:

$$\tilde{\mathbf{k}}(t) \Delta \mathbf{v}(t) = \Delta \tilde{\mathbf{p}}(t), \quad (14.5)$$

где

$$\tilde{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{k}(t) + \frac{6}{\Delta t^2} \mathbf{m} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{c}(t); \quad (14.6a)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{p}}(t) = \Delta \mathbf{p}(t) + \mathbf{m} \left[\frac{6}{\Delta t} \dot{\mathbf{v}}(t) + 3\ddot{\mathbf{v}}(t) \right] + \mathbf{c}(t) \left[3\dot{\mathbf{v}}(t) + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{v}}(t) \right]. \quad (14.6b)$$

Выражение (14.5) представлено в виде стандартного соотношения статической жесткости при векторе приращений перемещений $\Delta \mathbf{v}(t)$, где $\tilde{\mathbf{k}}(t)$ и $\Delta \tilde{\mathbf{p}}(t)$ могут соответственно рассматриваться как матрица эффективной динамической жесткости и приращение эффективной нагрузки. Анализ выполняется вычислением $\tilde{\mathbf{k}}(t)$ исходя из характеристик массы, затухания и жесткости, определенных для условий в начале шага интегрирования, а $\Delta \tilde{\mathbf{p}}(t)$ — из значений векторов скорости и ускорения в начале того же шага, а также приращения нагрузки для рассматриваемого шага. Затем решением уравнения (14.5) с использованием стандартного метода задач статического равновесия находится приращение $\Delta \mathbf{v}(t)$. Для этой цели в программах для ЭВМ часто используют метод разложения Гаусса или Холески. Следует отметить, что изменение значений $\mathbf{k}(t)$ и $\mathbf{c}(t)$ при решении нелинейной задачи требует разложения для каждого шага времени, что приводит к значительному объему вычислений на ЭВМ для больших систем уравнений. Чтобы упростить этот этап анализа, применялись специальные методы, но описание их выходит за рамки данной работы.

Когда определено приращение перемещения $\Delta \mathbf{v}(t)$, приращение скорости вычисляют из выражения, аналогичного (7.76):

$$\Delta \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{3}{\Delta t} \Delta \mathbf{v}(t) - 3\dot{\mathbf{v}}(t) - \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{v}}(t). \quad (14.7)$$

Векторы перемещения и скорости в конце интервала времени равны:

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \Delta \mathbf{v}(t) \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{v}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{v}}(t) + \Delta \dot{\mathbf{v}}(t). \quad (14.8)$$

Векторы, определяемые из выражений (14.8), представляют собой начальные условия для следующего шага анализа. Кроме того, необходимо определить для того же момента времени вектор ускорения. Как отмечалось выше, он определяется из условия динамического равновесия в момент $t + \Delta t$, т. е.

$$\ddot{\mathbf{v}}(t + \Delta t) = \mathbf{m}^{-1} [\mathbf{p}(t + \Delta t) - \mathbf{f}_D(t + \Delta t) - \mathbf{f}_S(t + \Delta t)], \quad (14.9)$$

где

$$\mathbf{f}_D(t + \Delta t) \quad \text{и} \quad \mathbf{f}_S(t + \Delta t)$$

представляют собой соответственно векторы сил затухания и жесткости, вычисленные из значений скорости и перемещения в момент времени $t + \Delta t$ (или, что то же самое, в зависимости от истории нагружения, если свойства материала зависят от процесса нагружения). Обратная матрица \mathbf{m}^{-1} используется в уравнении (14.9) на каждом этапе расчета. Поэтому она вычисляется и хранится в памяти машины.

14.4. БЕЗУСЛОВНО УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД ЛИНЕЙНОГО УСКОРЕНИЯ

Предпосылка о линейном изменении ускорения, которая является основой уравнений (14.6), позволяет создать эффективный метод шагового интегрирования при использовании достаточно коротких приращений времени. Как правило, при анализе получают более высокую точность для параметров колебаний систем с периодами, по крайней мере в пять—десять раз большими шага интегрирования (указанные периоды характеризуют линейные системы, рассматриваемые последовательно во время приращений времени).

Во многих случаях наиболее существенная часть реакции системы определяется компонентами движения с длинными периодами. Поэтому интервал времени для достижения необходимой точности наиболее существенной компоненты реакции не является неоправданно малым. Как отмечалось в гл. 7, метод линейного ускорения является только условно устойчивым и дает большие разбросы результатов при анализе компонент модальной реакции, имеющих периоды колебаний меньше 1,8 от шага интегрирования. Поэтому интервалы времени необходимо принимать короткими по сравнению с наибольшим периодом собственных колебаний системы независимо от того, оказывают ли высшие формы колебаний существенное влияние на динамическую реакцию или нет.

Для определенного типа сооружений в виде систем со многими степенями свободы, в том числе для многоэтажных зданий, моделируемых системами с одной степенью свободы для каждого этажа, это ограничение длины шага интегрирования может оказаться недостаточным. При анализе сейсмической реакции таких зданий интервал времени интегрирования должен быть принят значительно короче, чтобы отразить процесс колебаний основания, и самый короткий период собственных колебаний математической модели обычно значительно больше этого приращения времени. Метод линейного ускорения продемонстрировал эффективность как линейного, так и нелинейного анализа сейсмической реакции каркасных зданий. Для более общего класса сооружений, в частности для моделей сооружений сложной формы, представляемых набором конечных элементов, наиболее короткий период колебаний модели может быть на несколько порядков меньше периодов колебаний, определяющих реакцию системы. Для этих случаев обычный метод линейного ускорения не может быть использован в связи с очень коротким шагом инте-

рирования, который требуется для обеспечения устойчивости. Вместо него необходимо безусловно устойчивый метод независимо от отношения приращения времени к наиболее короткому периоду.

Несколько различных безусловно устойчивых шаговых методов использовались при анализе динамической реакции таких систем. Наиболее простым и лучшим из них является модификация рассмотренного ранее метода линейного ускорения, который называется θ — *методом Вильсона**. Эта модификация основана на предположении

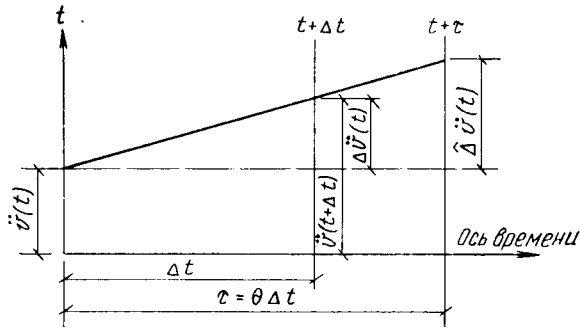


Рис. 14.2. Линейное ускорение, нормальное и увеличенный шаг времени

о том, что ускорение линейно изменяется в пределах расширенного интервала времени вычислительного процесса

$$\tau = \theta \Delta t, \quad \text{где } \theta > 1,37. \quad (14.10)$$

Параметры, связанные с этим допущением, показаны на рис. 14.2. Приращение ускорения $\hat{\Delta} \ddot{v}(t)$ вычисляют стандартным методом линейного ускорения для расширенного шага времени τ . Отсюда приращение $\Delta \dot{v}(t)$ для нормального шага времени Δt определяют методом интерполяции. При $\theta = 1$ метод сводится к стандартному методу линейного ускорения, а при $\theta > 1,37$ становится безусловно устойчивым.

Формулы для этого метода могут быть получены простым выражением основных соотношений метода линейного ускорения для расширенного интервала времени τ . Тогда по аналогии с выражениями (7.6):

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} \dot{v}(t) &= \tau \ddot{v}(t) + \frac{\tau}{2} \hat{\Delta} \ddot{v}(t); \\ \hat{\Delta} v(t) &= \tau \dot{v}(t) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{v}(t) + \frac{\tau^2}{6} \hat{\Delta} \ddot{v}(t), \end{aligned} \quad (14.11)$$

где верхний значок $\hat{\Delta}$ указывает, что приращения относятся к расширенному шагу времени. Выражая эти уравнения для $\hat{\Delta} \ddot{v}(t)$ и $\hat{\Delta} \dot{v}(t)$ через $\hat{\Delta} v(t)$ и подставляя их в уравнение движения, получим

* Метод предложен Е. Л. Вильсоном (Калифорнийский университет, Беркли).

по аналогии с (14.5) и (14.6) соотношения для расширенного шага интегрирования

$$\hat{k}(t) \hat{\Delta} v(t) = \hat{\Delta} \hat{p}(t), \quad (14.12)$$

где

$$\hat{k}(t) = k(t) + \frac{6}{\tau^2} m + \frac{3}{\tau^2} c(t); \quad (14.13a)$$

$$\hat{\Delta} \hat{p}(t) = \hat{\Delta} p(t) + m \left[\frac{6}{\tau} \dot{v}(t) + 3\ddot{v}(t) \right] + c(t) \left[3\dot{v}(t) + \frac{\tau}{2} \ddot{v}(t) \right]. \quad (14.13b)$$

Наконец, псевдостатическое соотношение (14.12) может быть решено для получения $\Delta v(t)$, и после подстановки в уравнение [аналогичное (7.7a)] приращение ускорения во время расширенного шага интегрирования

$$\hat{\Delta} \ddot{v}(t) = \frac{6}{\tau^2} \hat{\Delta} v(t) - \frac{6}{\tau^2} \dot{v}(t) - 3\ddot{v}(t). \quad (14.14)$$

Отсюда приращение ускорения для нормального шага интегрирования Δt получают линейной интерполяцией

$$\Delta \ddot{v}(t) = \frac{1}{\theta} \hat{\Delta} \ddot{v}(t), \quad (14.15)$$

а затем соответствующие приращения векторов скорости и перемещения получают из выражений типа (14.11), записанных для Δt . Результаты вычислений принимают для определения начальных условий для следующего шага времени (14.8) и (14.9), и весь процесс повторяют на необходимое число шагов.

14.5. ПРИМЕНЕНИЕ θ -МЕТОДА ВИЛЬСОНА

Теперь полезно рассмотреть общую схему и эффективность условно устойчивого метода интегрирования. С этой целью достаточно рассмотреть его применительно к системе с одной степенью свободы, поскольку, как отмечалось, реакция любой линейной системы может быть представлена с помощью модальных координат в виде системы реакций несвязанных моделей с одной степенью свободы.

Размеры ошибки, возникающей при любой схеме численного интегрирования, зависят от характеристик динамической нагрузки и шага интегрирования. Однако источником погрешностей вычислений является процесс анализа реакции при свободных колебаниях, и он может быть описан путем оценки искусственного изменения периода и уменьшения амплитуды.

Влияние удлинения периода и уменьшения амплитуды, вычисленных по θ -методу Вильсона, при свободных колебаниях простого осциллятора в случае начального перемещения показано на рис. 14.3 и 14.4. При этом величина погрешности принята в виде функции отношения шага интегрирования к периоду собственных колебаний.

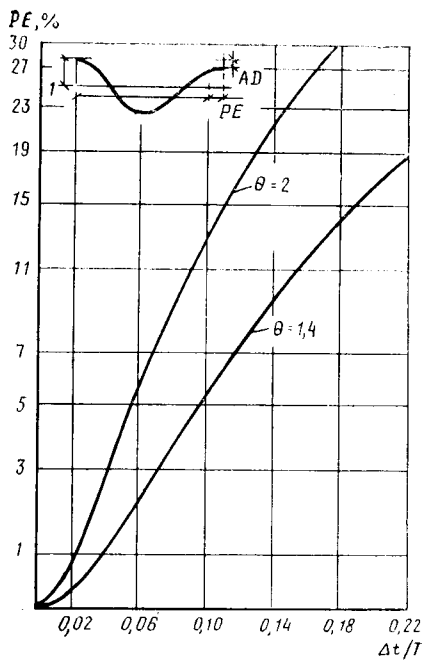


Рис. 14.3. Увеличение периода PE, θ — метод Вильсона

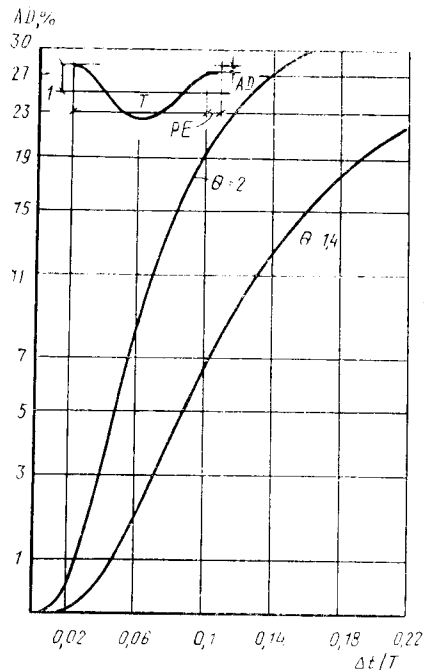


Рис. 14.4. Затухание амплитуды AD, θ — метод Вильсона

Результаты для двух случаев $\theta = 2$ и $\theta = 1,4$ показывают, что достигаемая точность значительно больше при меньшем значении θ .

Влияние удлинения периода и уменьшения амплитуды в некоторых случаях может быть существенным. Однако, как правило, более ощутимо уменьшение амплитуды. Оно может рассматриваться в форме искусственного затухания, которое добавляется к действительному затуханию в системе, и следует помнить, что уменьшение амплитуды колебаний за один цикл на 6% есть результат влияния затухания, равного примерно 1% критической величины. Из рис. 14.4 следует, что искусственное затухание оказывает небольшое влияние на анализ обычных конструкций с затуханием 5% и более от критической величины, если отношение $\Delta t/T < 1/10$, поскольку в этом случае дополнительное искусственное затухание находится в пределах точности определения действительного затухания. Очевидно также, что при $\Delta t/T > 1/4$ любые параметры реакции будут быстро затухать. Специалист по динамическому анализу должен постоянно учитывать влияние этого искусственного затухания. Очевидно, он должен выбирать шаг интегрирования достаточно коротким, чтобы реакция всех существенных модальных компонент определялась без искусственного занижения. С другой стороны, он должен помнить, что компоненты высших форм колебаний матема-

тической модели часто не отражают характер работы реального сооружения. Они сильно искажаются в процессе дискретизации. Более того, во многих случаях схема нагружения такова, что только низшие формы колебаний существенно проявляются в процессе реакции. Поэтому нет необходимости с большой точностью интегрировать компоненты для более высоких форм.

Из изложенного видно, что значительное уменьшение амплитуды может быть допущено для компонент с более высокими частотами, и во многих случаях целесообразно исключить их из процесса определения реакции. В этом смысле механизм затухания амплитуды в θ -методе Вильсона может рассматриваться как процесс преднамеренного отсечения модальных составляющих при использовании метода сложения форм собственных колебаний. Очевидно, что уменьшение амплитуды несущественно для любых форм колебаний, не включаемых в процесс сложения форм собственных колебаний.

ГЛАВА 15

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

15.1. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ

Существенные преимущества представления реакции динамических систем в обобщенных координатах по сравнению с перемещениями дискретных точек сооружения много раз подчеркивались в предыдущих главах книги. Рассматривались различные типы обобщенных координат. Также неоднократно указывались различные пути использования этих преимуществ при выводе уравнений колебаний сооружения в зависимости от его геометрической формы и сложности, а также от вида используемых координат. Во введении рассмотрены три основных метода:

- (1) непосредственный вывод уравнения равновесия всех динамических сил в системе;
- (2) вывод уравнения равновесия с помощью принципа возможных перемещений;
- (3) использование вариационного принципа Гамильтона.

Все эти методы в гл. 1 проиллюстрированы примерами расчета для систем с одной степенью свободы. Применительно к системам со многими степенями свободы пока использовались только метод равновесия и принцип возможных перемещений. В этой главе описаны и проиллюстрированы на примерах выводы уравнений движения систем со многими степенями свободы вариационными методами.

При вариационной формулировке методов расчета систем со многими степенями свободы широко используются обобщенные координаты. В связи с этим необходимо более точное определение принципа расчета, а не отдельные положения, рассмотренные ранее.

Обобщенные координаты для системы с N степенями свободы определяются как набор любых N независимых величин, которые полностью характеризуют положение любой точки системы. Будучи совершенно независимыми, обобщенные координаты не должны никаким образом выражаться через ограничения (связи, наложенные на систему).

Для классического примера двойного маятника на рис. 15.1 положение двух масс m_1 и m_2 может быть определено в координатах x_1, y_1, x_2, y_2 . Кроме того, на эти координаты наложены два геометрических ограничения:

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - L_1^2 &= 0; \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (15.1)$$

В связи с этими ограничениями x_1, y_1, x_2 и y_2 не являются независимыми и поэтому не могут рассматриваться в качестве независимых координат.

Предположим, что известны углы θ_1 и θ_2 и что они могут рассматриваться как координаты, определяющие положение масс m_1 и m_2 . Очевидно, что любая из этих координат может быть изменена при оставлении другой координаты постоянной. Таким образом, они совершенно независимы и представляют собой удобную пару обобщенных координат.

15.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Уравнения движения для любой системы с N степенями свободы могут быть непосредственно записаны из вариационного правила динамики, а именно принципа Гамильтона [см. выражение (B.4), которое для удобства приведено ниже]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (15.2)$$

путем выражения полной кинетической энергии T , полной потенциальной энергии V и полного приращения виртуальных работ δW_{nc} в функции системы обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_N .

Для большинства механических и строительных систем кинетическая энергия может быть выражена через обобщенные координаты и их первые производные по времени, а потенциальная энергия — только через обобщенные координаты. Кроме того, работа, которая производится неконсервативными силами на возможных перемещениях, вызванных произвольным набором вариаций обобщенных координат, может быть выражена как линейная функция этих вариаций. В математической форме указанные три положения записываются в виде:

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N); \quad (15.3a)$$

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_N); \quad (15.3б)$$

$$\delta W_{nc} = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N, \quad (15.3в)$$

где коэффициенты Q_1, Q_2, \dots, Q_N — обобщенные силовые функции, соответствующие координатам q_1, q_2, \dots, q_N .

Подставляя выражения (15.3a, б, в) в (15.2) и вычисля вариацию для первого члена, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_N} \delta q_N + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \delta \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_N} \delta \dot{q}_N \right. \\ \left. \times \delta \dot{q}_N - \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta q_2 - \dots - \frac{\partial V}{\partial q_N} \delta q_N + Q_1 \delta q_1 + \right. \\ \left. + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Интегрируя по частям члены в выражении (15.4), зависящие от скорости, получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \quad (15.5)$$

Первый член в правой части уравнения (15.5) равен нулю для каждой обобщенной координаты, поскольку $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ — основное условие, наложенное на вариации.

Подставляя уравнение (15.5) в (15.4), после приведения членов получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[- \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i \right\} dt = 0. \quad (15.6)$$

Поскольку все вариации δq_i ($i = 1, 2, \dots, N$) произвольны, уравнение (15.6) в общем случае удовлетворяется, если выражение в квадратных скобках равно нулю, т. е.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i. \quad (15.7)$$

Уравнения (15.7) известны как уравнения движения Лагранжа, которые нашли широкое применение в различных областях науки и техники.

Начинающий изучение динамики сооружений должен хорошо запомнить, что уравнения Лагранжа являются результатом непосредственного использования вариационного принципа Гамильтона при условии, что члены, характеризующие энергию и работу, выражены через обобщенные координаты, их производные по времени и вариации, как показано в (15.3). Поэтому уравнения Лагранжа применимы ко всем системам, которые удовлетворяют этим ограничениям и могут быть как линейными, так и нелинейными. Следующие примеры поясняют методы применения уравнений Лагранжа при динамическом расчете сооружений.

Пример 15.1. Рассмотрим свободные колебания двойного маятника, показанного на рис. 15.1. Координаты x и y вместе со своими первыми производными по времени могут быть выражены через обобщенные координаты $q_1 \equiv \theta_1$ и $q_2 \equiv \theta_2$:

$$\begin{aligned} x_1 &= L_1 \sin q_1; & \dot{x}_1 &= L_1 \dot{q}_1 \cos q_1; \\ y_1 &= L_1 \cos q_1; & \dot{y}_1 &= -L_1 \dot{q}_1 \sin q_1; \\ x_2 &= L_1 \sin q_1 + L_2 \sin q_2; & \dot{x}_2 &= -L_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + L_2 \dot{q}_2 \cos q_2; \\ y_2 &= L_1 \cos q_1 + L_2 \sin q_2; & \dot{y}_2 &= -L_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - L_2 \dot{q}_2 \sin q_2. \end{aligned} \quad (a)$$

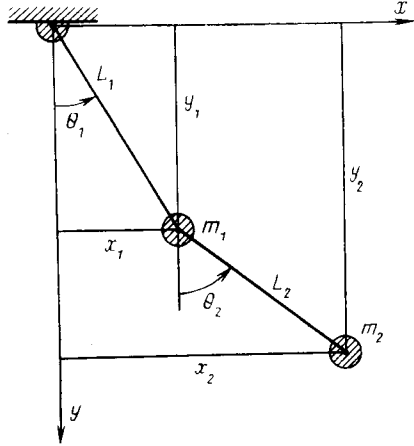


Рис. 15.1. Схема двойного маятника с шарнирной подвеской

Подставляя выражение для скоростей в основное уравнение кинетической энергии

$$T = 1/2 m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + 1/2 m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2), \quad (б)$$

получим:

$$T = 1/2 m_1 L_1^2 \dot{q}_1^2 + 1/2 m_2 [L_1^2 \dot{q}_1^2 + L_2^2 \dot{q}_2^2 + 2L_1 L_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1)]. \quad (в)$$

В выражение для потенциальной энергии двойного маятника на рис. 15.1 входят только силы тяжести. Если принять нулевой уровень потенциальной энергии при $q_1 = q_2 = 0$, то общее выражение для V равно:

$$V = (m_1 + m_2) g L_1 (1 - \cos q_1) + m_2 g L_2 (1 - \cos q_2), \quad (г)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Поскольку на систему не действуют неконсервативные силы, обобщенные силовые функции Q_1 и Q_2 равны нулю.

Подставляя выражение (в) и (г) в уравнения Лагранжа (15.7) для $i = 1$ и $i = 2$, получаем два уравнения движения:

$$(m_1 + m_2) L_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 L_1 L_2 \ddot{q}_2 \cos(q_2 - q_1) - m_2 L_1 L_2 \dot{q}_2^2 \sin(q_2 - q_1) + (m_1 + m_2) g L_1 \sin q_1 = 0; \quad (д)$$

$$m_2 L_2^2 \ddot{q}_2 + m_2 L_1 L_2 \ddot{q}_1 \cos(q_2 - q_1) + m_2 L_1 L_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_2 - q_1) + m_2 g L_2 \sin q_2 = 0.$$

Эти уравнения являются существенно нелинейными при больших амплитудах колебаний. Однако для колебаний с малыми амплитудами уравнения (д) могут быть линеаризованы:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) L_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 L_1 L_2 \ddot{q}_2 + (m_1 + m_2) g L_1 q_1 &= 0; \\ m_2 L_1 L_2 \ddot{q}_1 + m_2 L_2^2 \ddot{q}_2 + m_2 g L_2 q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (е)$$

Формы и частоты собственных колебаний системы с малыми амплитудами легко определяют из линеаризованных уравнений с помощью любого стандартного метода решения задачи о собственных значениях, например раскрытием определителя системы.

Пример 15.2. Предположим, что однородный жесткий стержень длиной L и общей массой m поддерживается упругой безмассовой изгибаемой пружиной

и подвергается действию равномерно распределенной изменяющейся во времени внешней нагрузки, как показано на рис. 15.2. Если вертикальные перемещения точек 1 и 2 вниз от положения статического равновесия принять в качестве обобщенных координат, соответственно q_1 и q_2 , то разрешающие уравнения движения в соответствии с теорией малых колебаний могут быть получены из уравнений Лагранжа следующим образом.

Потенциальная энергия жесткого стержня равна сумме кинетической энергии при поступательных и вращательных колебаниях

$$T = 1/2 m \left(\frac{\dot{q}_1 + \dot{q}_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{mL^2}{L} \left(\frac{q_1 - q_2}{L} \right)^2,$$

или

$$T = \frac{m}{6} (\dot{q}_1^2 + q_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2). \quad (a)$$

Поскольку q_1 и q_2 — перемещения от положения статического равновесия, силами тяжести системы можно пренебречь, полагая, что потенциальная энергия определяется только энергией деформаций, накопленной изгибаемой пружиной. Если эту энергию деформаций выразить через коэффициенты жесткости (определяемые, как показано на рис. 15.2), то потенциальная энергия примет вид

$$V = 1/2 (k_{11} q_1^2 + 2k_{12} q_1 q_2 + k_{22} q_2^2). \quad (б)$$

Работа, производимая неконсервативной нагрузкой $\bar{p}\zeta(t)$ на возможных перемещениях при произвольных вариациях $\delta q_1(t)$ и $\delta q_2(t)$, равна:

$$\delta W_{nc} = \frac{\bar{p}L\zeta(t)}{2} (\delta q_1 + \delta q_2). \quad (в)$$

Сравнив выражение (в) с (15.3в), получаем:

$$Q_1(t) = Q_2(t) = \frac{\bar{p}L}{2} \zeta(t). \quad (г)$$

После подстановки выражений (а), (б) и (г) в уравнения Лагранжа (15.7) получаем линейные уравнения колебаний системы:

$$\begin{aligned} \frac{m}{6} (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + k_{11} q_1 + k_{12} q_2 &= \frac{\bar{p}L}{2} \zeta(t); \\ \frac{m}{6} (\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2) + k_{12} q_1 + k_{22} q_2 &= \frac{\bar{p}L}{2} \zeta(t). \end{aligned} \quad (д)$$

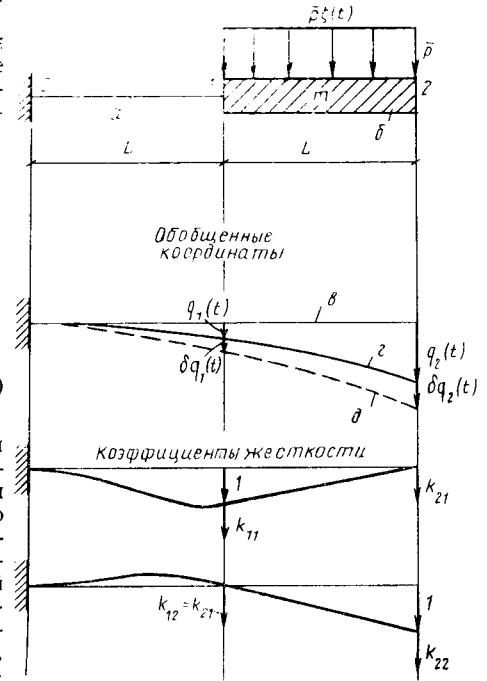


Рис. 15.2. Жесткий стержень на безмассовой изгибаемой пружине:

а — изгибаемая пружина; б — жесткий стержень; в — состояние статического равновесия; г — истинное динамическое состояние; д — возмущенное динамическое состояние

Пример 15.3. Три однородных жестких стержня с длиной L и массой m соединены шарнирами в точках 1 и 2, как показано на рис. 15.3, оперты на каток в точке 3 и шарнирно соединены с точкой 0. В точках 1 и 2 к смежным стержням присоединены упругие пружины, воспринимающие изгибающие моменты, и вязкие демпферы вращения с постоянными k_1, c_1, k_2 и c_2 . Постоянная сила N приложена в точке 3. Если эта система возбуждается приложением поперечной нагрузки $p_1(t)$ и малыми вертикальными смещениями $v_0(t)$ опоры 0, то разрешающие уравнения движения с использованием теории малых прогибов могут быть получены непосредственно с помощью уравнений Лагранжа.

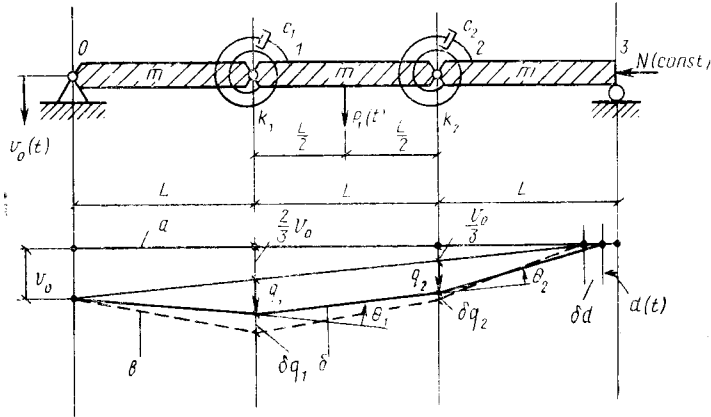


Рис. 15.3. Сопряжение стержней с двумя степенями свободы с пружинами поворота и демпферами:
 a — состояние статического равновесия; b — истинное динамическое состояние; v — возмущенное динамическое состояние

Кинетическая энергия трех жестких стержней равна:

$$T = \frac{m}{6} (3\dot{v}_0^2 + 2\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + 4\dot{v}_0 \dot{q}_1 + 2\dot{v}_0 \dot{q}_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2). \quad (a)$$

Движение стержней влево от опоры 3 при вертикальных перемещениях системы

$$d = \frac{1}{L} \left(\frac{v_0^2}{6} + q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2 \right). \quad (б)$$

Относительные углы поворота стержней в точках 1 и 2 и их вариации равны:

$$\theta_1 = \frac{1}{L} (2q_1 - q_2); \quad \delta\theta_1 = \frac{1}{L} (2\delta q_1 - \delta q_2); \quad (в)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{L} (2q_2 - q_1); \quad \delta\theta_2 = \frac{1}{L} (2\delta q_2 - \delta q_1). \quad (г)$$

Отсюда потенциальная энергия упругих пружин и осевой силы

$$V = \left[\frac{1}{2L^2} (4k_1 + k_2) - \frac{N}{L} \right] q_1^2 + \left[\frac{1}{2L^2} (k_1 + 4k_2) - \frac{N}{L} \right] q_2^2 + \left[\frac{1}{2L^2} (-4k_1 - 4k_2) + \frac{N}{L} \right] q_1 q_2 - \frac{Nv_0^2}{6L}. \quad (д)$$

Работа неконсервативных сил на возможных перемещениях

$$\delta W_{nc} = \frac{1}{2} p_1(t) (\delta q_1 + \delta q_2) - c_1 \dot{\theta}_1 \delta\theta_1 - c_2 \dot{\theta}_2 \delta\theta_2,$$

или

$$\delta W_{nc} = \left[\frac{p_1}{2} - \frac{2c_1}{L^2} (2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \frac{c_2}{L^2} (2\dot{q}_2 - \dot{q}_1) \right] \delta q_1 + \left[\frac{p_1}{2} + \frac{c_1}{L^2} (2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - \frac{2c_2}{L^2} (2\dot{q}_2 - \dot{q}_1) \right] \delta q_2. \quad (е)$$

откуда обобщенные силы равны:

$$Q_1 = \frac{p_1}{2} - \frac{2c_1}{L^2} (2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \frac{c_2}{L^2} (2\dot{q}_2 - \dot{q}_1);$$

$$Q_2 = \frac{p_1}{2} + \frac{c_1}{L^2} (2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - \frac{2c_2}{L^2} (2\dot{q}_2 - \dot{q}_1). \quad (ж)$$

Подставляя выражения (а), (д) и (ж) в (15.7), получим следующие два уравнения движения, из которых можно определить параметры динамической реакции:

$$\frac{2}{3} m \ddot{q}_1 + \frac{m}{6} \ddot{q}_2 + \left(\frac{4c_1}{L^2} + \frac{c_2}{L^2} \right) \dot{q}_1 + \left(-\frac{2c_1}{L^2} - \frac{2c_2}{L^2} \right) \dot{q}_2 + \left[\frac{1}{L^2} (4k_1 + k_2) - \frac{2N}{L} \right] q_1 + \left[\frac{1}{2L^2} (-4k_1 - 4k_2) + \frac{N}{L} \right] q_2 = \frac{p_1}{2} - \frac{m}{3} \ddot{v}_0; \quad (з)$$

$$\frac{m}{6} \ddot{q}_1 + \frac{2m}{3} \ddot{q}_2 + \left(-\frac{2c_1}{L^2} - \frac{2c_2}{L^2} \right) \dot{q}_1 + \left(\frac{c_1}{L^2} + \frac{4c_2}{L^2} \right) \dot{q}_2 + \left[\frac{1}{2L^2} (-4k_1 - 4k_2) + \frac{N}{L} \right] q_1 + \left[\frac{1}{L^2} (k_1 + 4k_2) - \frac{2N}{L} \right] q_2 = \frac{p_1}{2} - \frac{m}{3} \ddot{v}_0. \quad (и)$$

При нулевых ускорениях и скоростях и удалении источников возбуждения $p_1(t)$ и $v_0(t)$ уравнения (з) и (и) приводятся к условиям статического равновесия:

$$\left[\frac{1}{L^2} (4k_1 + k_2) - \frac{2N}{L} \right] q_1 + \left[\frac{1}{2L^2} (-4k_1 - 4k_2) + \frac{N}{L} \right] q_2 = 0;$$

$$\left[\frac{1}{2L^2} (-4k_1 - 4k_2) + \frac{N}{L} \right] q_1 + \left[\frac{1}{L^2} (k_1 + 4k_2) - \frac{2N}{L} \right] q_2 = 0. \quad (к)$$

Нетривиальное решение уравнений (к) возможно только в случае, когда система теряет устойчивость при осевой силе N . Этому условию соответствует равенство нулю определителя коэффициентов матрицы, т. е.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{L^2} (4k_1 + k_2) - \frac{2N}{L} & \frac{1}{2L^2} (-4k_1 - 4k_2) + \frac{N}{L} \\ \frac{1}{2L^2} (-4k_1 - 4k_2) + \frac{N}{L} & \frac{1}{L^2} (k_1 + 4k_2) - \frac{2N}{L} \end{vmatrix} = 0. \quad (л)$$

Раскрывая определитель (к), находим критическое значение силы:

$$N_{cr} = -\frac{3}{2L} (k_1 - k_2) \pm \sqrt{\frac{1}{12L^2} (13k_1^2 - 118k_1 k_2 + 13k_2^2)}. \quad (м)$$

Вычисления по формуле (м) позволяют получить два значения N_{cr} , соответствующие первой и второй формам потери устойчивости. Две формы потери устойчивости можно найти, последовательно подставляя эти критические силы в любое из выражений (л) и решения его относительно одной из обобщенных координат в функции другой.

15.3. ВЫВОД ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Как видно из трех рассмотренных примеров, кинетическая и потенциальная энергии для упругих сооружений при колебаниях с малыми амплитудами могут быть представлены в виде квадратичных форм

$$T = 1/2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = 1/2 \dot{q}^T m \dot{q}; \quad (15.8)$$

$$V = 1/2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N k_{ij} q_i q_j = 1/2 q^T k q, \quad (15.9)$$

где N — число степеней свободы системы.

Для таких систем вторые члены $\partial T / \partial q_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) в выражениях (15.7) равны нулю, что приводит уравнения Лагранжа к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial v}{\partial q_i} + Q_i; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (15.10)$$

Если выражения (15.8) и (15.9) подставить в (15.10), то уравнения Лагранжа в матричной форме имеют вид

$$m \ddot{q} + k q = Q, \quad (15.11)$$

которые совпадают с уравнениями, полученными для дискретных координат с помощью принципа возможных перемещений. Следует помнить, что все неконсервативные силы, включая диссипативные силы, содержатся в обобщенных силовых функциях Q_1, Q_2, \dots, Q_N .

Теперь рассмотрим задачу дискретизации, т. е. приближенного представления системы с бесконечным числом степеней свободы конечным числом координат. Например, боковые прогибы $v(x, t)$ изгибаемого элемента можно аппроксимировать выражением

$$v(x, t) \approx q_1(t) \psi_1(x) + q_2(t) \psi_2(x) + \dots + q_N(t) \psi_N(x), \quad (15.12)$$

где q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) — обобщенные координаты и ψ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) — предполагаемые безразмерные функции прогиба, которые удовлетворяют заданным граничным условиям для элемента.

Если $m(x)$ — погонная масса элемента, то кинетическая энергия (без учета инерции поворота масс) равна:

$$T = 1/2 \int m(x) \dot{v}(x, t)^2 dx. \quad (15.13)$$

После подстановки соотношения (15.12) в (15.13) получаем (15.8):

$$T = 1/2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где

$$m_{ij} = \int m(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx. \quad (15.14)$$

Энергия деформаций изгиба равна:

$$V = 1/2 \int EI(x) [v''(x, t)]^2 dx. \quad (15.15)$$

или после подстановки (15.12) в (15.15)

$$V = 1/2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N k_{ij} q_i q_j, \quad (15.9)$$

где

$$k_{ij} = \int EI(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx. \quad (15.16)$$

Для получения обобщенных силовых функций Q_1, Q_2, \dots, Q_N необходимо определить работу сил на возможных перемещениях δW_{nc} . Она характеризует работу всех неконсервативных сил на перемещениях изгибаемого элемента при произвольном наборе возможных перемещений $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_N$, приложенных к системе. Предположим, что материал изгибаемого элемента подчиняется следующему соотношению между напряжением и деформацией:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) + c_s \dot{\varepsilon}(t), \quad (15.17)$$

где E — модуль упругости Юнга; c_s — модуль затухания.

Используя соотношение (15.17) и гипотезу плоских сечений Бернулли-Эйлера, получим следующее соотношение между изгибающим моментом и перемещением:

$$m(x, t) = EI(x) v''(x, t) + c_s I(x) \dot{v}''(x, t). \quad (15.18)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (15.18) характеризует влияние консервативных сил, которые уже учитывались при определении потенциальной энергии V , а второе слагаемое — влияние внутренних неконсервативных сил. Работа этих неконсервативных сил на единицу длины элемента равна с обратным знаком произведению момента неконсервативных сил $c_s I(x) v''(x, t)$ на вариацию кривизны $\delta v''(x, t)$. Тогда полная виртуальная работа внутренних неконсервативных сил равна:

$$\delta W_{nc, в} = - \int c_s I(x) \dot{v}''(x, t) \delta v''(x, t) dx. \quad (15.19)$$

Работа внешних неконсервативных сил $p(x, t)$

$$\delta W_{nc, вн} = \int p(x, t) \delta v(x, t) dx. \quad (15.20)$$

Подставляя соотношение (15.12) в (15.19) и (15.20) и складывая их, получим:

$$\delta W_{nc, общ} = \sum_{i=1}^N \left(p_i - \sum_{j=1}^N c_{ij} \dot{q}_j \right) \delta q_i, \quad (15.21)$$

где

$$p_i = \int p(x, t) \psi_i(x) dx; \quad (15.22)$$

$$c_{ij} = \int c_s I(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx. \quad (15.23)$$

Из сравнения выражения (14.21) с (15.3в) видно, что

$$Q_i = p_i - \sum_{j=1}^N c_{ij} \dot{q}_j. \quad (15.24)$$

Наконец, подстановкой выражений (15.8), (15.9) и (15.24) в уравнения Лагранжа (15.7) получаем следующие разрешающие уравнения в матричной форме:

$$m \ddot{q} + c \dot{q} + kq = p. \quad (15.25)$$

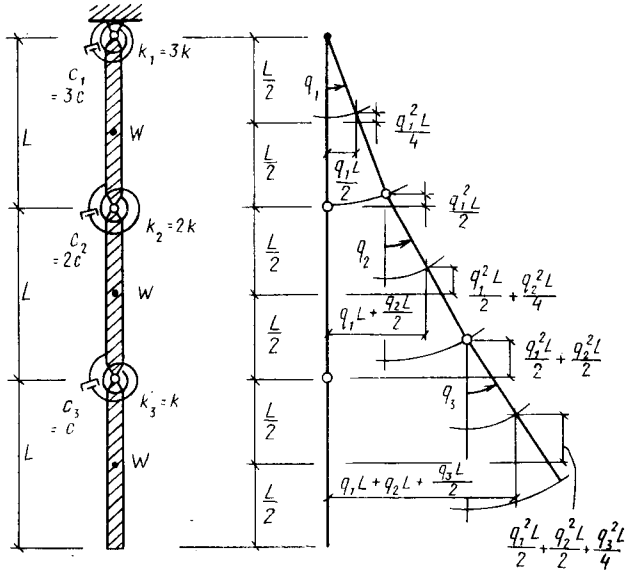


Рис. 15.4. Модель соединения жестких тел с тремя степенями свободы (включая влияние геометрической жесткости от собственного веса)

По определению m_{ij} , c_{ij} и k_{ij} характеризуются соответственно выражениями (15.14), (15.23), (15.16) и что справедливы условия

$$m_{ij} = m_{ji}, \quad c_{ij} = c_{ji}, \quad k_{ij} = k_{ji}. \quad (15.26)$$

Таким образом, в уравнении (15.25) матрицы масс, затухания и жесткостей симметричные матрицы.

Пример 15.4. Вывод уравнений движения из общих уравнений Лагранжа будет рассмотрен для сопряжения жестких стержней, показанного на рис. 15.4. Стержни между собой связаны шарнирами, а их взаимным поворотам препятствуют пружины поворота и демпферы, которые расположены в каждом шарнире и имеют характеристики, показанные на рисунке. В качестве обобщенных координат системы приняты углы поворота жестких стержней q_i . Предполагается, что перемещения системы малы и к ней применима теория малых прогибов.

Полная кинетическая энергия системы определяется энергией поворота жестких стержней относительно своих центров масс и энергией поступательных перемещений центров масс

$$T = \frac{1}{2} \frac{WL^2}{12g} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2} \frac{W}{g} \left[\left(\frac{\dot{q}_1 L}{2} \right)^2 + \left(\dot{q}_1 L + \frac{\dot{q}_2 L}{2} \right)^2 + \left(\dot{q}_1 L + \dot{q}_2 L + \frac{\dot{q}_3 L}{2} \right)^2 \right] = \frac{WL^2}{6g} (2\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 9\dot{q}_1 \dot{q}_2 + 3\dot{q}_2 \dot{q}_3 + 3\dot{q}_1 \dot{q}_3). \quad (a)$$

При определении полной потенциальной энергии также учитываются энергия при деформациях пружины поворота и энергия при вертикальных перемещениях центров тяжести стержней по отношению к их первоначальному положению (значения этих вертикальных перемещений приведены на рисунке).

$$V = W \left[\frac{q_1^2 L}{4} + \left(\frac{q_2^2 L}{2} + \frac{q_2^2 L}{4} \right) + \left(\frac{q_1^2 L}{2} + \frac{q_2^2 L}{2} + \frac{q_3^2 L}{4} \right) \right] + \\ + 1/2 [k_1 q_1^2 + k_2 (q_2 - q_1)^2 + k_3 (q_3 - q_2)^2] = 1/4 [(5WL + 10k) q_1^2 + (3WL + 6k) q_2^2 + \\ + (WL + 4k) q_3^2 - 8q_1 q_2 - 4q_2 q_3]. \quad (b)$$

Наконец, работа усилий в демпферах поворота на виртуальных перемещениях системы равна:

$$\delta W_{nc} = c_1 \dot{q}_1 \delta q_1 - c_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) (\delta q_2 - \delta q_1) - c_3 (\dot{q}_3 - \dot{q}_2) (\delta q_3 - \delta q_2) = \\ = c [(-5\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2) \delta q_1 + (2\dot{q}_1 - 3\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \delta q_2 + (\dot{q}_2 - \dot{q}_3) \delta q_3],$$

откуда неконсервативные силы, которые возникают только от диссипативных членов,

$$Q_1 = c(-5\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2); \quad Q_2 = c(2\dot{q}_1 - 3\dot{q}_2 + \dot{q}_3); \quad Q_3 = c(\dot{q}_2 - \dot{q}_3). \quad (в)$$

Подставляя выражение (а) в (в), получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_i} = Q_i; \quad i = 1, 2, 3, \quad (15.10a)$$

что приводит к трем уравнениям движения системы, представленным в матричной форме

$$\frac{WL^2}{6g} \begin{bmatrix} 14 & 9 & 3 \\ 9 & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \\ + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5WL + 10k & -4k & 0 \\ -4k & 3WL + 6k & -2k \\ 0 & -2kWL + 4k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (r)$$

15.4. ОГРАНИЧЕНИЯ И МНОЖИТЕЛИ ЛАГРАНЖА

Обычно при определении динамической реакции системы с N степенями свободы уравнения движения записываются в форме системы обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_N . Однако встречается случай, когда для использования симметрии уравнений колебаний более целесообразно выбрать систему координат g_1, g_2, \dots, g_c , где $c > N$. Эти координаты не могут быть обобщенными координатами, так как их число превышает число степеней свободы системы. Поэтому следует выделить m ($m = c - N$) уравнений, которые накладывают ограничения на систему. В качестве примера вернемся к двойному маятнику, показанному на рис. 15.1. Ранее отмечалось, что уравнения движения могут быть записаны в обобщенных перемещениях θ_1 и θ_2 ($N = 2$) или в координатах x_1, y_1, x_2, y_2 ($c = 4$). Если использо-

вать последние координаты, то должны удовлетворяться два уравнения связи (15.1).

Предположим, что m уравнений связи в общем случае выражены в форме:

$$\begin{aligned} f_1(g_1, g_2, \dots, g_c) &= 0; \\ f_2(g_1, g_2, \dots, g_c) &= 0; \\ &\dots \\ f_m(g_1, g_2, \dots, g_c) &= 0. \end{aligned} \quad (15.27)$$

Взяв вариации от уравнений (15.27), получим:

$$\begin{aligned} \delta f_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial g_1} \delta g_1 + \frac{\partial f_1}{\partial g_2} \delta g_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial g_c} \delta g_c = 0; \\ \delta f_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial g_1} \delta g_1 + \frac{\partial f_2}{\partial g_2} \delta g_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial g_c} \delta g_c = 0; \\ &\dots \\ \delta f_m &= \frac{\partial f_m}{\partial g_1} \delta g_1 + \frac{\partial f_m}{\partial g_2} \delta g_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial g_c} \delta g_c = 0. \end{aligned} \quad (15.28)$$

Если теперь каждую величину δf_i ($i = 1, 2, \dots, m$) умножить на неизвестную функцию времени $\lambda_i(t)$ и результат проинтегрировать в интервале от t_1 до t_2 [предполагается использование выражений (15.3) после преобразования к координатам g_1, g_2, \dots, g_c], а затем каждый из интегралов прибавить к вариационному уравнению Гамильтона (15.2), то после вычисления вариаций получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^c \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{g}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial g_i} - \frac{\partial V}{\partial g_i} + Q_i + \lambda_i \frac{\partial f_1}{\partial g_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial g_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial g_i} \right] \delta g_i \right\} dt = 0. \quad (15.29)$$

Поскольку все вариации δg_i ($i = 1, 2, \dots, c$) произвольны, необходимо, чтобы выражение в квадратных скобках в (15.29) равнялось нулю, т. е.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{g}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial g_i} + \frac{\partial V}{\partial g_i} = Q_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial g_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial g_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial g_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, c. \quad (15.30)$$

Уравнение (15.30) является модифицированной формой уравнений Лагранжа, которая допускает использование координат g_1, g_2, \dots, g_c . Метод получения уравнений (15.30), на первый взгляд, может показаться тривиальным, так как к уравнению Гамильтона были добавлены интегралы, равные нулю. Однако необходимо обратить внимание, что когда каждый из δf_i ($i = 1, 2, \dots, m$) равен нулю, каждое слагаемое в правой части (15.28) не равно нулю. Функции времени λ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) известны как *множители Лагранжа*.

Если записать выражение для усеченной потенциальной энергии

$$\bar{V} = V(g_1, g_2, \dots, g_c) - (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m), \quad (15.31)$$

то уравнения (15.30) можно представить в виде выражения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{g}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial g_i} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial g_i} = Q_i; \quad i = 1, 2, \dots, c, \quad (15.32)$$

которое содержит неизвестные функции времени $g_1, g_2, \dots, g_c, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Поскольку число неизвестных функций равно $c + m$, необходимы $c + m$ уравнений для их решения. Эти уравнения включают c модифицированных уравнений Лагранжа [см. (16.32)] и m уравнений связи [см. (16.27)].

Пример 15.5. Использование множителей Лагранжа для удовлетворения принятых ограничений рассмотрим на примере консольной балки с шарнирно-опертым концом (см. рис. 15.5). К балке приложена переменная во времени нагрузка $\bar{p}\zeta(t)$, равномерно распределенная по ее длине, а также осевая сила N . Предполагается, что изгибная жесткость балки постоянна по ее длине, а затухание не учитывается. Для получения приближенного решения, которое особенно целесообразно, если частотные составляющие в функции нагрузки достаточно низки, предполагается, что значения прогибов можно выразить следующим образом:

$$v(x, t) = g_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} + g_2(t) \sin \frac{2\pi x}{L}. \quad (a)$$

Определяя кинетическую и потенциальную энергию, а также работу внешних сил на возможных перемещениях в функции координат g_1 и g_2 , получим:

$$T = 1/2 \int_0^L \bar{m} \left(\dot{g}_1^2 \sin^2 \frac{\pi x}{L} + 2\dot{g}_1 \dot{g}_2 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} + \dot{g}_2^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{L} \right) dx; \quad (б)$$

$$\begin{aligned} V = 1/2 \int_0^L EI \left(g_1^2 \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \frac{\pi x}{L} + \frac{8\pi^4}{L^4} g_1 g_2 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} + \right. \\ \left. + g_2^2 \frac{16\pi^4}{L^4} \sin^2 \frac{2\pi x}{L} \right) dx - \frac{N}{2} \int_0^L \frac{\pi^2}{L^2} g_1^2 \cos^2 \frac{\pi x}{L} + \\ \left. + \frac{4\pi^2}{L^2} g_1 g_2 \cos \frac{\pi x}{L} \cos \frac{2\pi x}{L} + \frac{4\pi^2}{L^2} g_2^2 \cos^2 \frac{2\pi x}{L} \right) dx, \end{aligned} \quad (в)$$

$$\delta W_{nc} = \delta g_1 \int_0^L p(x, t) \sin \frac{\pi x}{L} dx + \delta g_2 \int_0^L p(x, t) \sin \frac{2\pi x}{L} dx. \quad (г)$$

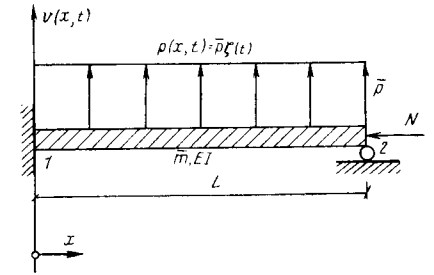


Рис. 15.5. Иллюстрация множителей Лагранжа для равномерно распределенной балки

После определения интегралов выражения (б), (в) и (г) принимают вид:

$$T = \frac{\bar{m}L}{4} (\dot{g}_1^2 + \dot{g}_2^2); \quad (д)$$

$$V = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} (g_1^2 + 16g_2^2) - \frac{N\pi^2}{4L} (g_1^2 + 4g_2^2); \quad (е)$$

$$\delta W_{nc} = \frac{2L}{\pi} \bar{p}\zeta(t) \delta g_1, \quad (ж)$$

после сравнения выражения (ж) с (15.3в) обобщенные внешние силы

$$Q_1 = \frac{2L\bar{p}\zeta(t)}{\pi}; \quad Q_2 = 0. \quad (з)$$

Если учесть заделку балки на левой опоре, то уравнение связи, которому должно удовлетворять решение, запишется в виде

$$f_1(g_1, g_2) = g_1 + 2g_2 = 0. \quad (и)$$

Подставляя выражения (е) и (и) в (15.31), получим выражение для потенциальной энергии

$$\bar{V} = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} (g_1^2 + 16g_2^2) - \frac{N\pi^2}{4L} (g_1^2 + 4g_2^2) - \lambda_1 (g_1 + 2g_2), \quad (к)$$

Наконец, после подстановки выражений (д), (з) и (к) в преобразованные уравнения Лагранжа (15.32) имеем:

$$\frac{\bar{m}L}{2} \ddot{g}_1 + \left(\frac{\pi^4 EI}{2L^3} - \frac{\pi^2 N}{2L} \right) g_1 - \lambda_1 = \frac{2L\bar{p}\zeta(t)}{\pi};$$

$$\frac{\bar{m}L}{2} \ddot{g}_2 + \left(\frac{8\pi^4 EI}{L^3} - \frac{2\pi^2 N}{L} \right) g_2 - 2\lambda_1 = 0. \quad (л)$$

Теперь полное решение задачи может быть найдено определением $g_1(t)$, $g_2(t)$ и $\lambda_1(t)$ из уравнений (и) и (л). Полученное решение показывает, что $\lambda_1(t)$ пропорционален изгибающему моменту в заделке (при $x=0$). Виртуальная работа этого момента равна нулю, поскольку защемление в этой точке не допускает виртуального поворота поперечного сечения балки.

ЧАСТЬ III

АНАЛИЗ СЕЙСМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

ГЛАВА 16

ИСХОДНЫЕ СЕЙСМОЛОГИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ

16.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Хотя динамические нагрузки, действующие на строительные конструкции, могут иметь различную природу и вызываться различными воздействиями — ветром, волновыми возмущениями или колебаниями при движении транспорта, наибольший интерес для инжене-

ра-строителя, безусловно, представляют воздействия от землетрясений. Важность проблемы сейсмостойкости сооружений обусловливается катастрофическими последствиями сильных землетрясений в густонаселенных районах. Поскольку проектирование экономичных и выразительных в архитектурном отношении зданий, которые могут противостоять инерционным нагрузкам при интенсивных землетрясениях, требует инженерного искусства и использования научных достижений, на примере сейсмостойкости сооружений целесообразно продемонстрировать основные положения теории и методов расчета, изложенных в предыдущих разделах данной книги.

Важность проблемы обеспечения сейсмостойкости выходит за рамки текущих потребностей строительства в сейсмических районах. При планировании развития предприятий атомной энергетики необходимо принять строгий критерий антисейсмической защиты при проектировании атомных электростанций. Это требование вызвало повышенный интерес к динамике сооружений, равно как и к практическому применению результатов динамического расчета. Наконец, уместно привести замечание Н. Ньюмарка и Э. Розенблюета: «Землетрясения систематически выявляют ошибки, допущенные при проектировании и строительстве, — даже самые незначительные ошибки; эта особенность сейсмостойкого строительства подчеркивает трудности и притягательные стороны решения его проблем, а также их общеобразовательное значение, выходящее за пределы непосредственного использования результатов исследований»¹.

Важную исходную информацию для изучения и практической реализации вопросов сейсмостойкости представляют, естественно, данные о самом землетрясении. Детальное изучение землетрясений и механизмов их возникновения относится к сфере сейсмологии. В своих исследованиях специалист по сейсмостойкому строительству должен подходить к изучению землетрясений с иных позиций, чем сейсмолог. Сейсмологи сосредоточивают свое внимание прежде всего на глобальных или макроскопических последствиях землетрясений и поэтому имеют дело с небольшими амплитудами колебаний грунта, не вызывающими ощутимой реакции сооружений. Инженеры, наоборот, имеют дело в основном с местными эффектами сильных землетрясений там, где колебания грунта достаточно интенсивны, чтобы вызвать повреждения конструкций. Эти так называемые сильные сейсмические движения имеют параметры слишком большие для регистрации с помощью типовых приборов, применяемых сейсмологами, и требуют разработки специальных сейсмографов сильных движений. Тем не менее, несмотря на различие сферы деятельности инженеров в области сейсмостойкого строительства и сейсмологов, многие вопросы сейсмологии представляют для инженера большой интерес. Наиболее важные из них рассмотрены в этой главе.

¹ Newmark N. M. and Rosenblueth E. Fundamentals of Earthquake Engineering. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. Y., 1971.

16.2. СЕЙСМИЧНОСТЬ

Общие механизмы движений в недрах земли, приводящие к землетрясениям, пока недостаточно ясны, и предлагаемые теории механизмов землетрясений часто противоречивы.

Первопричины землетрясений непосредственно связаны с общими тектоническими процессами, постоянно вызывающими горообразование и образование океанических впадин в земной коре. Тектонические плиты, движения которых характеризуют эти процессы, могут быть указаны, по крайней мере частично, на картах сейсмичности.

Информация о землетрясениях, которые могут причинить повреждения сооружениям, существенно ограничена и пока не дает возможности составить для всего земного шара и даже отдельных регионов карты сейсмической опасности, где устанавливаются вероятности землетрясений заданной интенсивности с определенным средним периодом повторения.

На континентальной части Соединенных Штатов Америки самый активный сейсмический район располагается вдоль Калифорнийского побережья и связан с разломом Сан-Андреас. Этот разлом и ряд второстепенных разломов (рис. 16.1) явились источниками самых сильных калифорнийских землетрясений за рассматриваемый период времени, включая разрушительное землетрясение в Сан-Франциско в 1906 г. Разлом Сан-Андреас — одна из наиболее активных и изученных систем разломов в мире. Его расположение примечательно в топографическом отношении, он почти полностью выходит на поверхность земли в Калифорнии. Изучение этой системы разломов и землетрясений, связанных с ней, позволяет существенно расширить современные знания о механизмах возникновения землетрясений и характеристиках сильных сейсмических движений. Интересно, что относительные подвижки грунта вдоль этого разлома, соответствующие постоянному перемещению против движения часовой стрелки относительно Тихоокеанского бассейна, наблюдаются здесь как во время землетрясений, так и при постоянном крипе, регистрируемом геодезической службой. Эти измерения свидетельствуют о движении

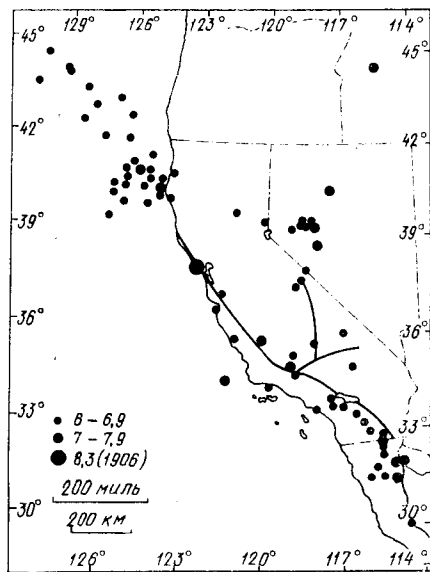


Рис. 16.1. Эпицентры основных землетрясений и разломы в Калифорнии за период 1903—1956 гг. с магнитудой M

ряд второстепенных разломов (рис. 16.1) явились источниками самых сильных калифорнийских землетрясений за рассматриваемый период времени, включая разрушительное землетрясение в Сан-Франциско в 1906 г. Разлом Сан-Андреас — одна из наиболее активных и изученных систем разломов в мире. Его расположение примечательно в топографическом отношении, он почти полностью выходит на поверхность земли в Калифорнии. Изучение этой системы разломов и землетрясений, связанных с ней, позволяет существенно расширить современные знания о механизмах возникновения землетрясений и характеристиках сильных сейсмических движений. Интересно, что относительные подвижки грунта вдоль этого разлома, соответствующие постоянному перемещению против движения часовой стрелки относительно Тихоокеанского бассейна, наблюдаются здесь как во время землетрясений, так и при постоянном крипе, регистрируемом геодезической службой. Эти измерения свидетельствуют о движении

геологической структуры к западу от разлома в северном направлении по отношению к его восточному крылу со скоростью около 5 см в год.

16.3. ТЕОРИЯ УПРУГОЙ ОТДАЧИ ПРИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯХ

Х. Ф. Рид на основании результатов изучения рызрывов вдоль разлома Сан-Андреас во время Сан-Францисского землетрясения 1906 г. впервые дал четкое определение теории упругой отдачи при описании процесса зарождения землетрясения. Многие сейсмологи уже

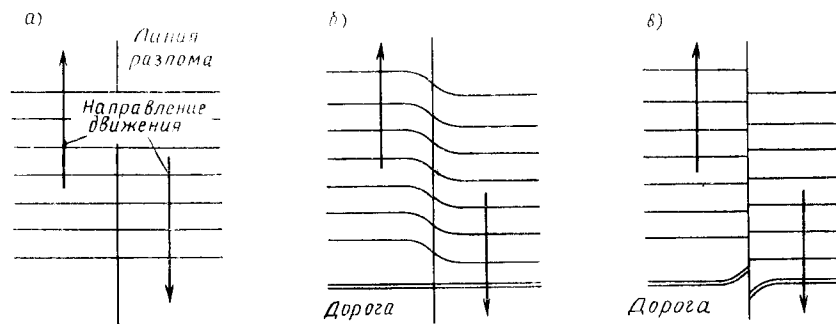


Рис. 16.2. Механизм упругой отдачи при зарождении землетрясения: а — до деформирования; б — деформированная порода (до землетрясения); в — после землетрясения

приходили к выводу о том, что землетрясения являются результатом разрывов или разломов в земной коре. Однако исследования Ридом перемещений сдвига с большой амплитудой, которые наблюдались вдоль десятков километров вдоль разлома, позволили ему прийти к заключению, что специфическим источником энергии сейсмических колебаний было высвобождение накопленных деформаций земной коры. Это высвобождение само происходит в результате внезапного разрыва сдвигового типа.

Существенная особенность механизма упругой отдачи, который позволяет наилучшим способом объяснить землетрясения, вызывающие интенсивные и потенциально разрушительные колебания поверхностных слоев, видна из рис. 16.2. Активная зона разлома показана в центре и предполагается, что геологическая структура слева (как для разлома Сан-Андреас) движется к северу с постоянной скоростью. Если бы несколько заборов были построены перпендикулярно линии действия разлома (см. рис. 16.2, а), этот постоянный дрейф приводил бы к постепенному искажению линии заборов, как показано на рис. 16.2, б. На схеме также показана дорога, относительно которой предполагается, что она построена после искажения оград. Важно отметить, что постоянная деформация пород приводит к напряжениям и деформациям, превышающим их прочность. В некото-

рой критической точке зоны разлома начинается разрыв, который быстро распространяется по длине сильно деформированных пород. В результате снимаются упругие деформации и соответствующие перемещения приводят к схеме, показанной на рис. 16.2, в, с большими подвижками дороги и линий заборов. После снятия деформаций линии заборов снова станут прямыми, а дорога, которая была построена на уже деформированном основании, получит локальные искривления.

16.4. СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Согласно теории механизма упругой отдачи, источником землетрясения является внезапное движение грунта по обеим сторонам от разлома, которое происходит от разрыва земной коры. Само землетрясение представляет собой систему волн колебаний, которые возбуждаются этой дислокацией. Классическая сейсмология занимается в основном изучением этих упругих волн при их прохождении в земле. При разрыве генерируются два типа волн: продольные, называемые от слова primary (первичные) волнами Р, и поперечные, или волны сдвига — волны S от слова secondary (вторичные). Волны Р движутся быстрее, чем волны S. Поэтому если их скорости, которые зависят от свойств материала среды, известны, то расстояние от точки наблюдения до очага можно определить по разности моментов вступления двух типов волн. В результате измерения разности моментов вступления волн от источника на многих станциях, которые установлены по всему земному шару, можно установить положение источника и характер отражения и преломления волн от границ пород (см. рис. 16.3). Почти все данные о внутреннем строении Земли были получены в результате подобных сейсмологических исследований.

Телесеismicкие записи подобных сейсмических волн имеют малую ценность для специалистов в области сейсмостойкого строительства в связи с указанными ранее малыми амплитудами колебаний грунта. Только вблизи точки разрыва (фокуса или гипоцентра) колебания грунта достаточно велики, чтобы вызвать повреждения в зданиях. В этой стадии механизм возникновения волн может быть рассмотрен, следуя Дж. В. Хаузнеру, на примере небольшой (размером в монету) трещины, расположенной на поверхности разлома, как показано на рис. 16.4. Предположим, что характер напряжений в этой части зоны с трещинами достиг предельного уровня. Когда происходит разрыв, освобождение деформаций вблизи поверхности трещины будет сопровождаться внезапным относительным перемещением обоих концов трещины. Эти перемещения вызывают волну перемещения, которая быстро распространяется от источника. Запись подобного простого импульса перемещений, зарегистрированная станцией на среднем расстоянии от фокуса, имела бы вид, показанный на рис. 16.5. Там же приведены записи скорости и ускорения, соответствующих импульсу перемещения. Сравнения этих идеализирован-

ных записей колебаний грунта с реальными записями ускорений при землетрясении Порт-Хьюним, 1957 г. (они даны на рис. 16.6 вместе с зависимостями для скорости и перемещения, которые получены при интегрировании акселерограммы) показывают, что землетрясение также характеризовалось одним импульсом смещения.

Таким образом, механизм указанного землетрясения был подобен модели разрыва с образованием простой трещины.

Записи характерных землетрясений, таких, как Эль-Сентро, 1940 г. (одна из компонент которого показана на рис. 16.7), значительно сложнее, чем запись землетрясения Порт-Хьюним, что, по видимому, связано с более сложным механизмом очага. Гипотеза, которая дает удовлетворительное объяснение характерной записи сейсмического воздействия, заключается в том, что землетрясение представляет собой последовательность разрывов вдоль поверхности разлома. Каждый последующий разрыв является источником элементарной сейсмической волны типа воздействия в Порт-Хьюним.

В связи с тем что разрывы происходят в разные моменты времени и в разных точках, наблюдаемые движения на близрасположенных станциях будут представлять собой случайную комбинацию простых записей, как показано на рис. 16.7.

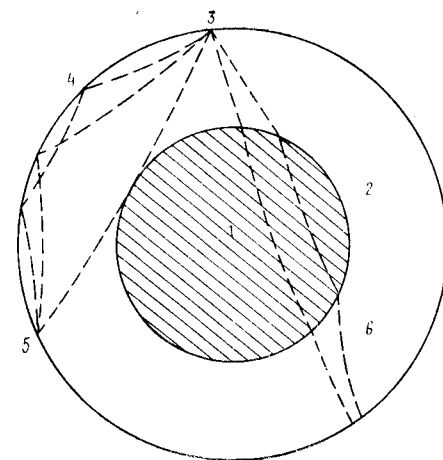


Рис. 16.3. Путь некоторых Р-волн от очага

1 — ядро; 2 — мантия; 3 — фокус землетрясения; 4 — отражение от поверхности; 5 — сейсмологическая станция; 6 — отражение от ядра

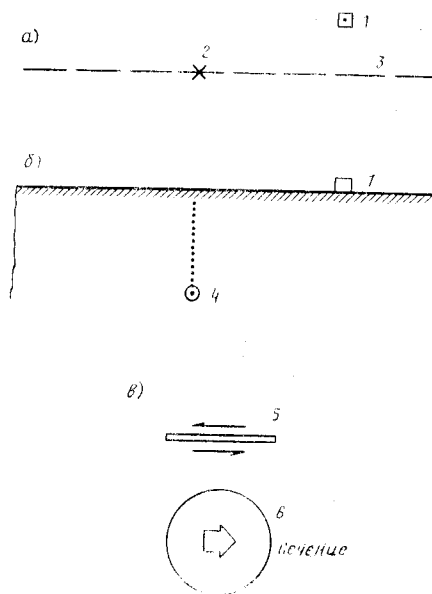


Рис. 16.4. Идеализированный точечный очаг разрыва при землетрясении (а — план; б — разрез вдоль разлома; в — трещина в очаге в виде небольшой монеты) 1 — регистрирующий прибор; 2 — эллипс; 3 — линия разлома; 4 — фокус; 5 — план; 6 — периметр трещины

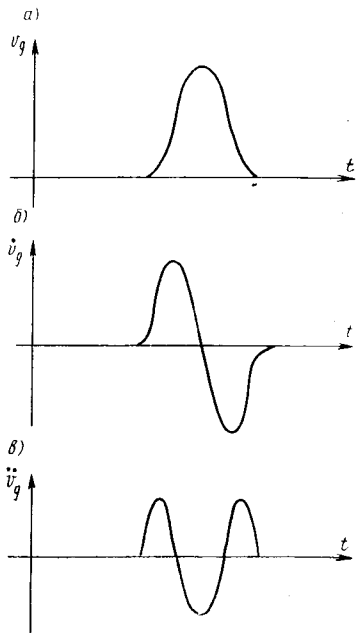


Рис. 16.5. Идеальное движение грунта от точечного источника:
а — перемещение; б — скорость; в — ускорение

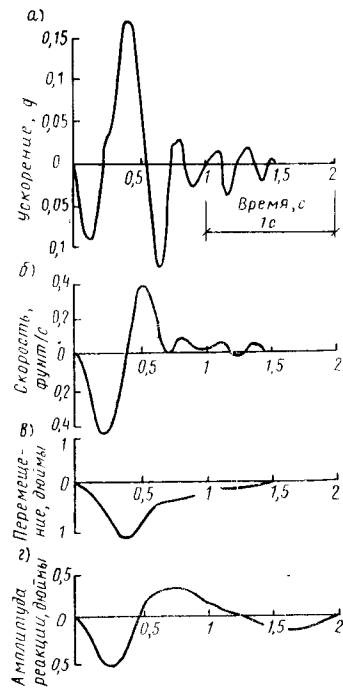


Рис. 16.6. Акселерограмма землетрясения Порт-Хьюним С—Ю, 18.03.1957
а — ускорение; б — скорость; в — перемещение; г — реакция маятника с периодом 2,5 с

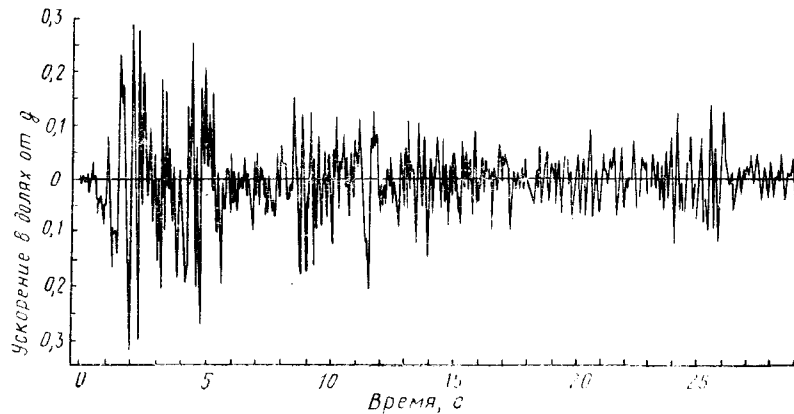


Рис. 16.7. Акселерограмма землетрясения Эль-Сентро, С-Ю. (18.05.1940)

В связи с изложенным следует подчеркнуть, что сейсмологи определяют фокус землетрясения как точку в земной коре, в которой начинается *первый* разрыв по поверхности разлома, и *эпицентр* как проекцию фокуса на поверхность Земли. Если землетрясение является результатом последовательности разрывов вдоль линии разлома, очевидно, что фокус может не совпадать с центром высвобождения энергии. При сильном землетрясении, которое может быть связано с разломом длиной в сотни километров, расстояние от эпицентра до сооружения может не иметь большого значения, в этом случае важным параметром является расстояние до ближайшей точки вдоль поверхности разрыва.

16.5. ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТА

Для инженера-строителя наиболее важным показателем сейсмических движений грунта является характер их воздействия на сооружения в форме напряжений и деформаций или суммарных повреждений. Этот потенциальный уровень повреждений зависит, по крайней мере, частично от силы землетрясения и ряда параметров, которые его характеризуют. Наиболее важным параметром с сейсмологической точки зрения является величина энергии деформаций, высвобождаемой в очаге, которая характеризуется *магнитудой*. По определению, магнитуда — десятичный логарифм максимальной амплитуды, выраженной в микронах (записи землетрясения, полученной сейсмографом Вуда-Андерсона и приведенной к расстоянию 100 км). Определенная таким образом магнитуда связана с количеством высвобождающейся энергии следующим эмпирическим выражением:

$$\log E = 11,8 + 1,5M. \quad (16.1)$$

В соответствии с (16.1) при увеличении магнитуды на единицу энергия увеличивается в 32 раза. Для строителей более важны результаты наблюдений, свидетельствующие о том, что землетрясения с магнитудой менее 5 не должны вызывать повреждения зданий и инженерных сооружений, между тем при $M > 5$ потенциально возможно разрушительное воздействие сейсмических волн.

Знание магнитуды землетрясения само по себе еще недостаточно, чтобы дать ответ на вопрос, можно ли ожидать повреждения сооружения? Она характеризует относительную силу землетрясения в очаге. Расстояние от сооружения до очага также служит важным показателем влияния землетрясения на амплитуды реакции сооружения. Мера сотрясения грунта в любой точке на поверхности земли называется *интенсивностью землетрясения*. Обычно с увеличением расстояния от очага она убывает, хотя и встречаются аномалии из-за влияния местных грунтово-геологических условий. Самые ранние оценки интенсивности основаны на результатах анализа действия колебаний грунта на естественные и искусственные сооружения. В США стандартом для определения интенсивности землетрясений

в течение многих лет служит модифицированная 12-балльная шкала Меркалли (шкала ММ): от 1 балла (не ощущается) до 12 (полное обрушение). На основании результатов изучения интенсивности землетрясений обычно составляются карты изосейст (см. рис. 16.8). Хотя такая количественная оценка интенсивности представляет большую ценность, когда отсутствуют инструментальные записи землетрясения, она недостаточна для разработки критериев расчета сейсмостойких сооружений.

Исходная информация о характеристиках сейсмических воздействий для проектирования была недостаточной до тех пор, пока не установили первые акселерографы сильных движений и не создали системы наблюдений Береговой и геодезической службы США. Акселерограмма на рис. 16.7 (совместно с другой горизонтальной и вертикальной компонентами) зарегистрирована одним из первых таких приборов. Скорость накопления инструментальной информации в течение многих лет оказалась очень небольшой, так как число приборов и места их установки были весьма ограничены. Постепенно более густая сеть была создана в Японии, Мексике, наиболее сейсмоактивных районах США, в других частях земного шара, и к настоящему времени накоплена новая и важная информация. Несомненно все же, что число приборов пока ограничено, и при многих разрушительных землетрясениях во многих частях света не удастся получить инструментальных данных. Поэтому фундаментальная информация о влиянии таких факторов, как магнитуда, эпицентрального расстояние и местные грунтово-геологические условия, на параметры сейсмических воздействий пока еще ограничена.

Три компоненты колебаний грунта, зарегистрированные акселерографом, представляют собой полное описание землетрясения, которое воздействует на здания и сооружения на этой площадке. Наиболее важными параметрами записи на каждой компоненте (см. рис. 16.7) с точки зрения расчета конструкций являются амплитуда, частотный состав и продолжительность. Амплитуда обычно характеризуется пиковым значением ускорения или иногда числом пиков, превышающих определенный уровень. Скорость колебаний грунта может быть более показательной мерой интенсивности, чем ускорение, но обычно записью скоростей не располагают, если не выполняются дополнительные вычисления. Частотный состав может быть грубо представлен числом пересечений в секунду нулевой линии на акселерограмме, а продолжительность — интервалом времени между первым и последним пиками, превышающими заданный уровень. Очевидно, что все эти количественные характеристики вместе дают очень приближенное описание процесса колебаний грунта и не отражают их потенциальную опасность для сооружений.

Более точной мерой интенсивности сейсмического воздействия может быть реакция осциллятора на землетрясения, например одноэтажной рамы, показанной на рис. 16.9. Реакция такой рамы на определенное ускорение грунта $\ddot{v}_g(t)$ может быть выражена с помощью

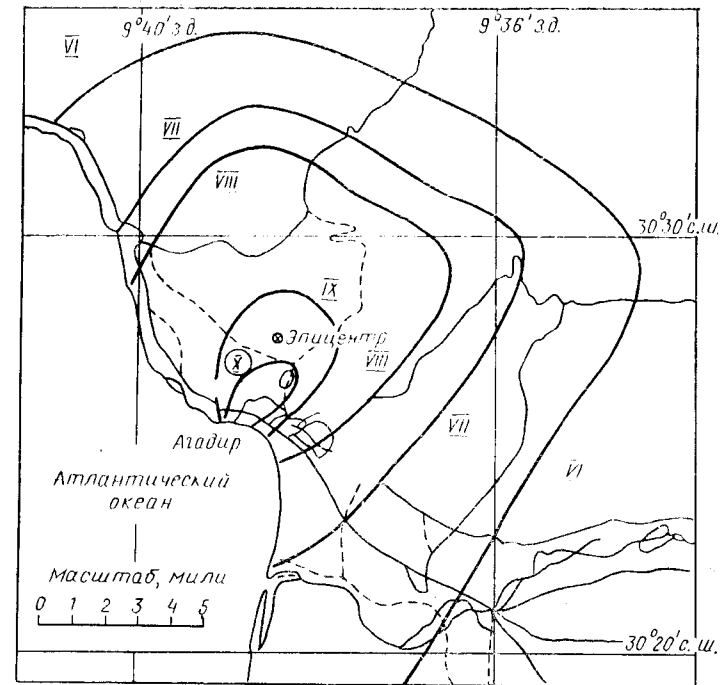


Рис. 16.8. Карта изосейст землетрясения в Агадире (1960 г.)

интеграла Дюамеля (6.14), если для этого случая эффективное воздействие принять в виде $p_{\text{eff}}(t) = -m\ddot{v}_g(t)$, [см. (1.21)].

$$\text{Тогда } v(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t -m\ddot{v}_g(\tau) \exp[-\xi\omega(t-\tau)] \sin \omega_D(t-\tau) d\tau. \quad (16.2)$$

Когда различие между частотами с учетом затухания и без него мало (а это имеет место для всех практических случаев параметров затухания $\xi < 20\%$) и с учетом того, что знак минус не имеет физического смысла в выражении для сейсмического воздействия, можно получить:

$$v(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp[-\xi\omega(t-\tau)] \sin \omega(t-\tau) d\tau. \quad (16.3)$$

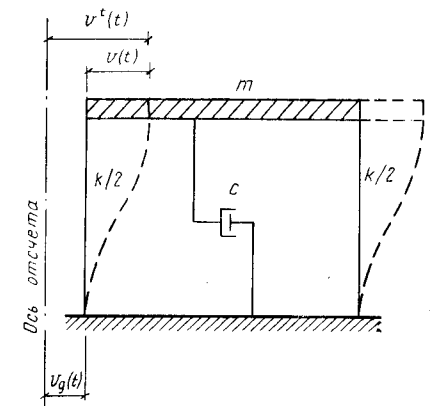


Рис. 16.9. Основная система с одной степенью свободы

Наконец, если в качестве меры интенсивности сейсмического воздействия принято максимальное значение параметра реакции относительно основания, то это максимальное значение равно:

$$v_{\max} = \frac{1}{\omega} S_v, \quad (16.4)$$

где спектральная псевдоскорость реакции S_v равна:

$$S_v(\xi, \omega) = \left[\int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp[-\xi\omega(t-\tau)] \sin \omega(t-\tau) d\tau \right]_{\max} \quad (16.5)$$

Как видно из выражения (16.5), S_v зависит не только от процесса колебания грунта, но и от частоты собственных колебаний и затухания осциллятора. Таким образом, для любой записи сейсмического воздействия при определенном значении затухания в сооружении можно определить значения S_v для всего диапазона частот колебаний. Зависимость величин скорости реакции от частоты колебаний (или обратного ей периода затухания) называется спектром псевдоскорости реакции на сейсмическое воздействие. Такие спектры обычно вычисляют для нескольких значений параметров затухания и совместно изображают на одном графике, как показано на рис. 16.10 для записи на рис. 16.7.

Эквивалентной мерой реакции осциллятора на сейсмическое воздействие $\ddot{v}_g(t)$ может быть спектр смещений S_d , который представляет собой максимум перемещения относительно грунта и определяется согласно (16.4) выражением

$$S_d = \frac{S_v}{\omega}. \quad (16.6)$$

Кроме того, спектр ускорения S_a равен:

$$S_a = \omega S_v = \omega^2 S_d \quad (16.7)$$

и является мерой упругой восстанавливающей силы осциллятора

$$f_{S, \max} = k S_d = \omega^2 m S_d = m S_a.$$

Графики спектров смещений и спектров ускорений могут быть получены аналогично спектрам псевдоскоростей, показанным на рис. 16.10, но простые соотношения между тремя этими величинами дают возможность изображать их на одном графике с четырьмя координатами в логарифмическом масштабе, как показано на рис. 16.11 для той же акселерограммы землетрясения Эль-Сентро, С—Ю. На этом графике в качестве абсциссы принят логарифм периода колебаний, а ординаты представляют собой $\log S_v$. Значения $\log S_a$ и $\log S_d$ представлены в координатах, расположенных под углом 45° к оси абсцисс.

Очевидно, что спектры реакции — более показательная мера интенсивности сейсмического воздействия, чем одна величина, например максимальное ускорение. В действительности эти спектры

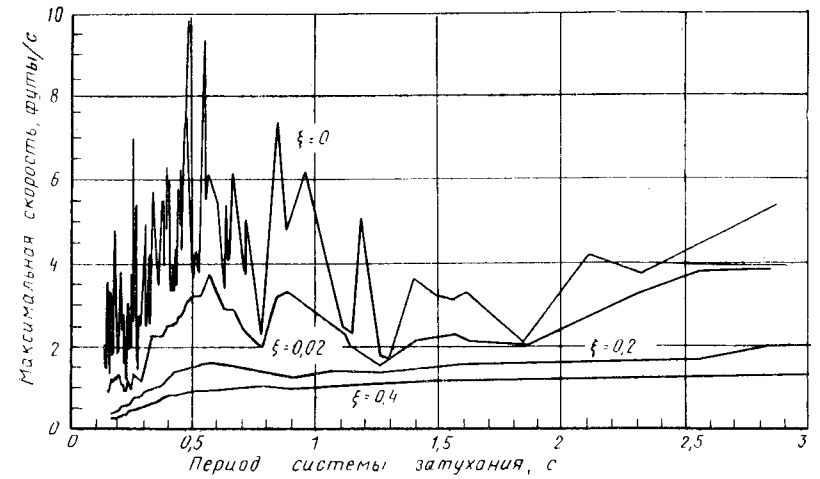


Рис. 16.10. Спектр псевдоскорости. Эль-Сентро, С-Ю, 1940

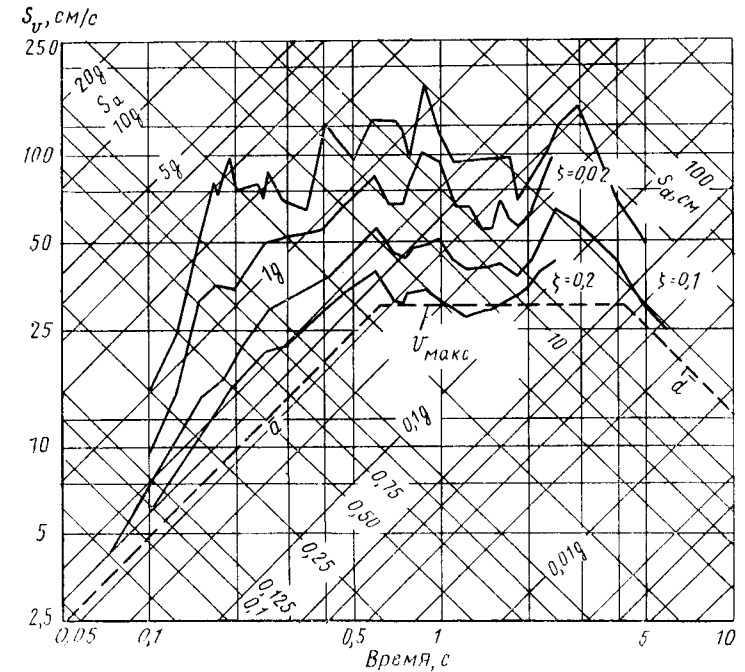


Рис. 16.11. Спектр реакции для землетрясения Эль-Сентро, 1940:

\bar{v} — максимальная скорость движения грунта; \bar{a} — максимальное ускорение грунта; \bar{d} — максимальное перемещение грунта

реакции непосредственно показывают, какого значения может достигнуть реакция реальной системы с одной степенью свободы (с определенным периодом колебаний и затуханием). Единственным ограничением для их применения является требование о том, что реакция системы должна быть упругой, так как по определению интеграл Дюамеля (16.2) справедлив для линейных систем. Поэтому спектры реакции не могут определить степень повреждений, ожидаемых при данном землетрясении, поскольку повреждения предопределяются развитием неупругих деформаций. Тем не менее суммарные значения ожидаемых упругих деформаций являются существенным показателем интенсивности колебаний грунта. Более того, спектр реакции определяет максимальные перемещения сооружений для всего диапазона частот. Поэтому интегралы от спектра реакции для заданного интервала периодов есть наилучшая общая характеристика интенсивности колебаний грунта. Дж. Хаузнер назвал эту величину *спектральной интенсивностью* и определил ее как интеграл от спектра псевдоскорости реакции в диапазоне периодов 0—2,5 с:

$$SI(\xi) = \int_{0,1}^{2,5} S_v(\xi, T) dT. \quad (16,8)$$

Как видно, этот показатель может быть найден для любого значения параметра затухания сооружения.

Параметр реакции S_v называется спектром псевдоскорости, поскольку он характеризует не максимум действительных скоростей, а, как следует из выражения (16.6), дает возможность определить действительные максимальные относительные перемещения, но является только приближением для относительных скоростей. Выражение для действительной относительной скорости получается после дифференцирования (16.3)

$$\dot{v}(t) = \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp[-\xi\omega(t-\tau)] \cos \omega(t-\tau) d\tau - \xi\omega v(t). \quad (16.9)$$

Эта формула может быть преобразована для определения спектров действительной скорости реакции путем вычисления максимума для заданного диапазона частот и параметров затухания. На практике, однако, спектр псевдоскорости применяется чаще, поскольку он позволяет перейти к определению перемещений, которые представляют большой интерес для расчета сооружений.

Полная энергия системы может быть получена путем суммирования выражений для потенциальной и кинетической энергии

$$E(t) = T(t) + V(t) = 1/2 m [\dot{v}(t)]^2 + 1/2 k [v(t)]^2, \quad (16.10)$$

где перемещения и скорости определяются соответственно из выражений (16.3) и (16.9). Тогда спектр энергии максимальной реакции можно выразить как максимум $E(t)$ для определенного диапазона частот и параметров затухания. Для практических целей удобно вы-

числять величину энергии как квадратный корень из удвоенной величины энергии на единицу массы сооружения

$$\sqrt{\frac{2E(t)}{m}} = \{[\omega v(t)]^2 + [\dot{v}(t)]^2\}^{1/2}. \quad (16.11)$$

Максимум этой величины четко определяет верхний предел как спектра псевдоскорости, так и спектра действительных скоростей, каждый из которых принимается как квадратный корень от соответствующего параметра. Отметим, что для системы без учета затухания, подставляя $\xi = 0$ в (16.3) и (16.9), можно преобразовать (16.11) к виду

$$\sqrt{\frac{2E(t)}{m}} = \left\{ \left[\int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \cos \omega\tau d\tau \right]^2 + \left[\int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \sin \omega\tau d\tau \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (16.12)$$

Еще одна оценка процесса колебаний грунта может быть получена с помощью спектра Фурье, определяемого как

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{v}_g(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (16.13)$$

Если процесс колебаний грунта продолжается от $\tau = 0$ до $\tau = t_1$, то

$$F(\omega) = \int_0^{t_1} \ddot{v}_g(\tau) \cos \omega\tau d\tau - i \int_0^{t_1} \ddot{v}_g(\tau) \sin \omega\tau d\tau.$$

Окончательно амплитуда спектра Фурье равна:

$$|F(\omega)| = \left\{ \left[\int_0^{t_1} \ddot{v}_g(\tau) \cos \omega\tau d\tau \right]^2 + \left[\int_0^{t_1} \ddot{v}_g(\tau) \sin \omega\tau d\tau \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (16.14)$$

Сравнение выражений (16.14) и (16.12) показывает, что спектр Фурье есть мера полной энергии недемпфированной системы при продолжительности сейсмического воздействия $t = t_1$. Конечно, максимум энергии, как правило, достигается в какой-то промежуточный момент времени, поэтому величина (16.12) обычно больше амплитуды спектра Фурье. Спектр Фурье представляет собой исчерпывающую характеристику входного сейсмического воздействия, так как его преобразование [обратное преобразованию (16.13)]

$$\ddot{v}_g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (16.15)$$

характеризует весь процесс. Однако для инженерных расчетов спектры реакции, характеризующие максимумы параметров реакции во время землетрясения, представляют большее значение.

Инженер-строитель изучает сейсмологию с единственной целью — предсказать характеристики входного сейсмического воздействия, на которое следует рассчитать сооружения. Сейсмические нагрузки — особые из всех видов нагрузок, которые необходимо учитывать при проектировании, поскольку сильное землетрясение обычно вызывает в критических сечениях сооружения большие напряжения и смещения, чем все другие нагрузки, вместе взятые. Однако вероятность такого землетрясения в течение срока службы сооружения очень мала. Чтобы рационально сочетать предельные нагрузки и малую их вероятность, обычно принимают следующие критерии двойного расчета:

1. В качестве основы для расчета принимается умеренное землетрясение, которое может произойти в месте расположения здания в течение его срока службы. Здание должно быть запроектировано так, чтобы выдержать сейсмическое воздействие такой интенсивности без существенных повреждений его основных конструкций.

2. В качестве меры безопасности сооружения принимается наиболее сильное землетрясение, которое возможно для площадки строительства. Поскольку маловероятно, что такое землетрясение произойдет в течение срока службы здания, то сооружение может быть запроектировано так, что при землетрясении его конструкции могут получить существенные повреждения, однако их обрушение и возможность человеческих жертв должны быть предотвращены.

Для установления характеристик колебаний грунта при расчетных землетрясениях или максимальных вероятных землетрясениях для площадки строительства необходимо прежде всего изучить историю землетрясений в данном районе в течение длительного периода времени, как и другие сейсмологические данные. Только на основании этой информации можно оценить магнитуду землетрясений и вероятную частоту их повторения (средний период повторения событий). Так как землетрясения происходят очень редко, статистические данные позволяют получить в лучшем случае грубую оценку сейсмичности территории. Другие сведения могут быть взяты из геологических исследований, позволяющих определить потенциально активные разломы и характеристики местных геологических структур.

Конечный этап сейсмологических исследований — определение магнитуд и эпицентральных расстояний расчетного землетрясения и максимально возможного землетрясения. Например, можно предсказать, что за период 50-летней службы проектируемого здания должно произойти одно землетрясение с магнитудой 7 вблизи разлома на расстоянии 25 км. Максимальное воздействие на той же территории возможно от землетрясения с магнитудой 8.5 при эпицентральном расстоянии всего 10 км. Ожидаемый период повторения сильного землетрясения равен нескольким сотням лет, и, следовательно, его вероятность в период срока эксплуатации здания очень

мала, однако проектом должна быть обеспечена безопасность сооружения даже в случае этого редкого события.

Конечно, магнитуда и эпицентральное расстояние расчетного землетрясения непосредственно не определяют параметров колебаний грунта на площадке строительства, на которые следует рассчитать здание. Чтобы установить расчетные требования, необходимо соотнести эти сейсмологические показатели с интенсивностью и другими параметрами ускорений, ожидаемых на площадке строительства. Много предположений высказывалось в этом направлении, и их подробное обсуждение выходит за рамки данной главы. Достаточно очень кратко описать некоторые общепринятые методы.

Один из наиболее простых способов определения колебаний грунта — использование акселерограммы прошлого землетрясения, которое имело соответствующую магнитуду и было зарегистрировано на соответствующем расстоянии от эпицентра. Например, запись сильного воздействия при землетрясении Эль-Сентро, С—Ю, 18/V 1940 г. во многих случаях использовалась для представления землетрясения с магнитудой 7 и эпицентральным расстоянием около 7 км. Однако опыт показал, что возможны существенные различия записей землетрясений с одинаковыми магнитудами и эпицентральными расстояниями, и реакция сооружений на эти воздействия меняется в очень широких диапазонах. Таким образом, использование одной записи, например показанной на рис. 16.7, для определения расчетного землетрясения не устраняет большой степени неопределенности параметров реакции сооружений.

Очевидно, что усредненное сейсмическое воздействие будет более разумной моделью расчетного входного процесса, и наиболее эффективным методом описания усредненных воздействий являются спектры реакции.

Например, Хаузнер* разработал расчетный спектр, показанный на рис. 16.12, с помощью вычисления спектров реакции по двум компонентам записей четырех различных землетрясений и их последующего нормирования, осреднения и сглаживания. Этот спектр был нормирован так, чтобы величина спектральной скорости системы без затухания при больших периодах равнялась 1 фут/с [30,4 см/с], что соответствует примерно $1/2,7$ интенсивности акселерограммы, показанной на рис. 16.7. Расчетные спектры были также получены по оценкам максимальных величин ускорений, скоростей и смещений грунта. Если эти величины обозначить \bar{a} , \bar{v} и \bar{d} , то соответствующие параметры максимальной реакции осциллятора с малым затуханием равны примерно $4\bar{a}$, $3\bar{v}$ и $2\bar{d}^{**}$.

На базе этих предпосылок и с учетом того, что спектр ускорений достигает максимума \bar{a} для очень жестких сооружений (с малыми периодами колебаний), а спектр смещений достигает максимума \bar{d} для

* G. W. Housner. Behavior of Structures during Earthquakes. Proc. ASCE, vol. 85, EM4, 1959.

** См. кн. Н. Ньюмарка и Э. Розенблюета, с. 228.

очень гибких сооружений (с большими периодами), можно изобразить разумный сглаженный спектр типа показанного на рис. 16.13. Следует отметить, что при таком подходе требуется до построения спектров реакции оценить величины локальных параметров колебаний грунта (\bar{a} , \bar{v} и \bar{d}) по магнитуде землетрясения и эпицентральному расстоянию площадки.

Хотя расчетный спектр реакции представляет хорошую базу для проектирования здания на этапе предварительного расчета и конструирования, как правило, остается нерешенным вопрос об описании модели колебаний грунта для расчета на землетрясение максимально возможной интенсивности. Записи реальных землетрясений особенно важно использовать при проектировании сооружений, для которых необходимо определить параметры неупругой реакции (когда спектры реакции уже не применимы), или для учета разного типа взаимодействия в зданиях и сооружениях. Один из подходов

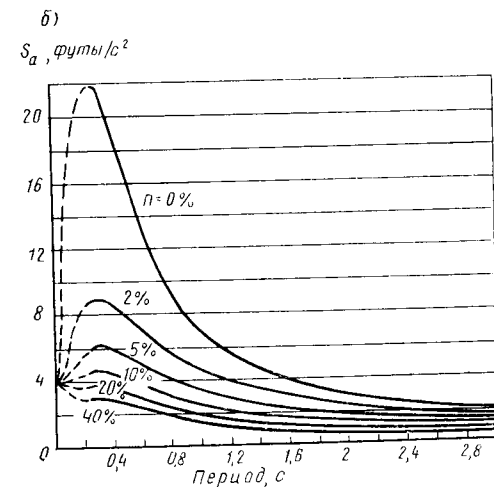
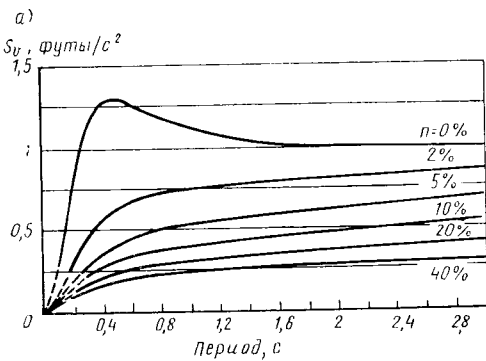


Рис. 16.12. Сглаженные усредненные спектры реакции

a — скорости S_v ; b — ускорения S_a

к выбору подходящей записи колебаний грунта заключается в модификации и искажении реальной записи с тем, чтобы она могла отразить землетрясения с разными магнитудами и эпицентральными расстояниями. Например, интенсивность воздействия может быть выбрана путем умножения на масштабный коэффициент, частотный состав может быть выбран изменением масштаба времени, а продолжительность землетрясения задана отсечением или добавлением частей его записи. Такая методика признана достаточно эффективной при выборе одной или двух акселерограмм, соответствующих землетрясению с определенной магнитудой и эпицентральной расстоянием. Однако в связи с тем что все значительные сейсмические движения генерируются существенно случайными процессами, характеристики колебаний грунта, определяемые магнитудой и эпицентральной расстоянием, могут изменяться в широких диапазонах при

переходе от одного события к другому. Поэтому предпочтительно иметь статистически представительные данные нескольких сейсмических воздействий для каждой магнитуды и эпицентрального расстояния, чем принимать одно или два воздействия. Тогда оценка реакции сооружений может быть выполнена статистическими методами.

Для реализации этой задачи в последние годы становится общепринятым генерирование записей искусственных воздействий, ко-

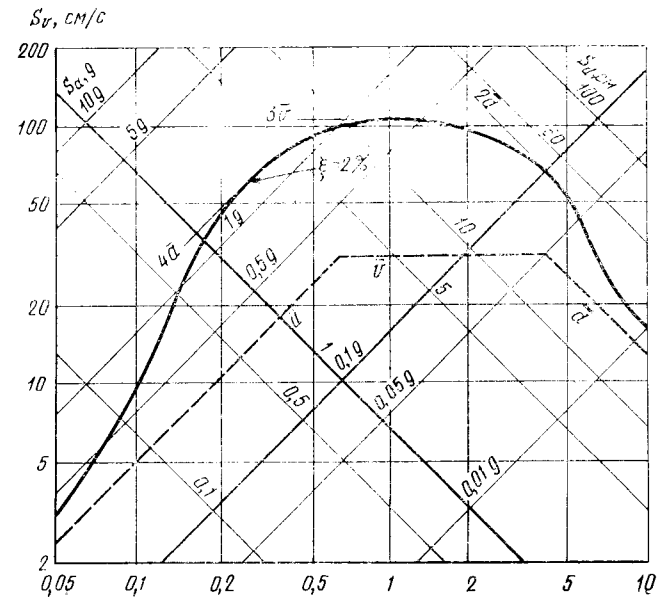


Рис. 16.13. Расчетный спектр, составленный по максимальным характеристикам колебания грунта (Н. Ньюмарк и Э. Розенблюет)

a — максимальное ускорение грунта; v — максимальная скорость движения грунта; d — максимальное перемещение грунта; сплошная кривая — расчетный спектр

торые должны отражать характеристики расчетных землетрясений. Эти записи колебаний грунта генерируются с помощью случайных процессов и могут повторяться неоднократно для получения желаемой выборки входных воздействий. Один из методов получения искусственных записей колебаний грунта был основан на простом математическом моделировании последовательности разрывов вдоль предполагаемого разлома и распространения волн колебаний от каждого последующего источника до пункта наблюдения. Такое моделирование требует достаточно сложного и дорогого вычислительного оборудования, и, по-видимому, является чрезмерно точным по сравнению с теми предпосылками, которыми необходимо руководствоваться при моделировании прогнозируемых землетрясений.

Более простой подход, который также приводит к приемлемым результатам, основан на гипотезе о том, что источник колебаний грунта представляет собой случайную последовательность импульсов, генерируемых на некотором расстоянии от пункта наблюдения и проходящих к нему через основание сооружения.

ГЛАВА 17

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ АНАЛИЗ СЕЙСМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

17.1. МЕХАНИЗМЫ ВХОДА СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Установление подходящего процесса колебаний грунта, рассмотренного в гл. 16, — наиболее трудный и неопределенный этап задачи прогнозирования реакции сооружений при землетрясениях. Когда процесс колебаний основания уже выбран, определение напряжений и перемещений может быть выполнено любым из стандартных методов динамики сооружений, некоторые из них рассмотрены в ч. I и II. Детерминированный анализ на заданное сейсмическое воздействие будет рассмотрен в этой главе в связи с тем, что понимание детерминированного характера сейсмической реакции позволяет осмыслить сущность работы сооружений. Тем не менее расчетные требования по обеспечению сейсмостойкости часто более эффективно могут быть сформулированы в вероятностной постановке. Единственная особенность расчета на сейсмические воздействия по сравнению с расчетом при других динамических нагрузках состоит в том, что воздействие прикладывается в виде кинематического возбуждения опор основания, а не в форме внешних нагрузок. Поэтому сущность рассматриваемых в этой главе задач сводится к обсуждению методов определения процесса эффективного нагружения сооружений, являющихся результатом заданных колебаний основания.

Сейсмические колебания грунта чаще всего описываются в виде трех компонент ускорения. Реакция любой упругой системы на эти три компоненты может быть рассчитана путем суперпозиции параметров реакции на каждую отдельную компоненту. Таким образом, задача расчета сводится к стандартному определению реакции здания при одном поступательном воздействии. В более общем случае опора дополнительно к поступательному воздействию может испытывать поворот, поскольку сейсмические волны проходят через грунты основания. Тогда полное описание сейсмического воздействия должно включать в принципе три компоненты перемещений и три компоненты поворотов. Несомненно, пока еще не получены записи вращательных компонент колебаний грунта, и, следовательно, этот эффект (в нескольких случаях, когда его учитывали) рассматривался только для предварительной оценки порядка крутиль-

ных колебаний, которые определялись по компонентам поступательных движений.

Другое допущение, присущее обычной модели сейсмических воздействий, заключается в предположении об одновременности колебаний всех частей основания сооружения. Если пренебречь крутильными компонентами, то это допущение эквивалентно рассмотрению грунтов основания или скалы очень жесткими. Это предположение не согласуется с теорией распространения сейсмических волн в земной коре от разрыва в зоне разлома. Если размеры основания сооружения малы по сравнению с длиной сейсмических волн, то эта гипотеза приемлема. Например, при скорости распространения волн 6000 футов/с (1800 м/с) волна с частотой 3 Гц имеет длину 2000 футов (600 м), и здание размером в плане около 100 футов (30×30 м) будет практически испытывать одинаковые возмущения по всей своей длине (ширине). Однако висячий мост или плотина длиной, например 1500 футов (400 м), безусловно, получит существенно различные воздействия по длине. Во время землетрясений пока не получены непосредственные данные о различии параметров колебаний отдельных частей земной поверхности, однако ясно, что они должны иметь место, и предварительный анализ показал, что такие воздействия окажут значительное влияние на характер динамической реакции. Следовательно, важно разрабатывать методы анализа, позволяющие рассчитывать сооружения при воздействии в виде ряда входных процессов для отдельных опор сооружения.

И, наконец, последний фактор, который следует учитывать при определении эффективных усилий, генерируемых в сооружении при землетрясении, заключается в учете колебаний, которые вызываются движением самого сооружения. Другими словами, колебания в основании сооружения могут отличаться от колебаний грунта, которые бы наблюдались в отсутствие сооружения. Этот эффект взаимодействия грунт—сооружение имеет небольшое значение, если основание здания твердое, а само здание достаточно гибкое. В этом случае здание передает в грунт небольшую энергию, и колебания грунта без сооружения эквивалентны параметрам колебаний фундамента. Однако если тяжелое жесткое здание (например, атомная электростанция) подстилается толстым слоем рыхлых грунтов, значительная часть энергии передается от сооружения в грунт, и движение основания будет резко отличаться от колебаний грунта без сооружения. Этот эффект взаимодействия наблюдается совместно с эффектом влияния свойств подстилающих грунтов на параметры колебаний свободной поверхности (см. гл. 16).

Как правило, усиление параметров колебаний грунта и эффекты взаимодействия мягких наносных слоев достаточно существенны и должны учитываться при анализе сейсмической реакции.

Цель этой главы — рассмотрение детерминированных методов анализа сооружений с различными конструктивными решениями последовательно при следующих видах входных воздействий: простое однокомпонентное перемещение основания; повороты жесткого ос-

нования; относительные перемещения различных опор; случай взаимодействия в системе грунт—сооружение, когда движение основания не следует непосредственно за колебаниями, определенными для свободной поверхности грунта. В дополнение будут кратко рассмотрены наиболее важные особенности нелинейной сейсмической реакции зданий.

17.2. ПОСТУПАТЕЛЬНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЖЕСТКОГО ОСНОВАНИЯ

17.2.1. Дискретные системы с одной степенью свободы

Задача определения сейсмической реакции наиболее простыми методами решается для системы с одной степенью свободы и сосредоточенной массой при одинаковом поступательном возбуждении всех ее опор. Примером такой системы служит рама (см. рис. 17.1), рассмотренная в гл. 16 при определении спектров сейсмической реакции. Уравнение ее движения имеет вид

$$m\ddot{v}^t + c\dot{v}^t + kv = 0, \quad (17.1)$$

где индекс t обозначает полное смещение системы.

Эффективная сейсмическая нагрузка на раму при ее динамической реакции есть результат инерционной нагрузки, которая согласно (17.1) зависит от полного перемещения системы, в то время как затухание и восстанавливающая сила определяются относительными перемещениями. Таким образом,

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p_{eff}, \quad (17.2)$$

где эффективная сейсмическая сила

$$p_{eff} = -m\ddot{v}_g. \quad (17.3)$$

С другой стороны, если силы затухания и упругости выражены через разности между полными перемещениями и перемещениями грунта, то уравнение может быть записано в полных перемещениях

$$m\ddot{v}^t + c\dot{v}^t + kv^t = c\dot{v}_g + kv_g. \quad (17.4)$$

Правая часть уравнения (17.4) представляет собой эффективную сейсмическую нагрузку, выраженную через коэффициенты затухания и жесткости системы. В принципе задача определения сей-

смической реакции может быть решена как с помощью выражения (17.1), так и (17.4). Однако на практике уравнение (17.4) используется редко, так как применяемое в этом случае выражение для эффективной сейсмической нагрузки более сложное, а сейсмическое воздействие обычно задается в виде ускорений основания.

Для рассмотрения этого вопроса удобно представить перемещения системы в виде решения интеграла Дюамеля для уравнения (17.2), как следует из (16.3). Напомним, что реакция может быть также определена с помощью шагового метода интегрирования или спектральным методом. При решении (17.2) с помощью интеграла Дюамеля относительные перемещения могут быть записаны в виде

$$v(t) = \frac{1}{\omega} V(t), \quad (17.5)$$

где $V(t)$ — интеграл, определяемый выражением

$$V(t) = \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp[-\xi\omega(t-\tau)] \sin \omega(t-\tau) d\tau. \quad (17.6)$$

В (17.6) используется частота собственных колебаний без учета затухания. Вносимая при этом приближении ошибка незначительна в связи с неопределенностью рассматриваемого входного сейсмического воздействия $\ddot{v}_g(t)$. Необходимо также отметить, что знак минус перед выражением для эффективной сейсмической нагрузки в (17.3) опущен, поскольку, как правило, ориентация сейсмической реакции представляет небольшой интерес.

Определение относительного перемещения согласно (17.5) является одним из главных моментов анализа сейсмической реакции сооружений. Безусловно, полное перемещение может быть получено с учетом перемещений основания, но эта задача редко представляет практический интерес. Другой характеристикой сейсмической реакции является сила, связанная с упругими деформациями. Для системы с одной степенью свободы и сосредоточенной массой ее можно выразить непосредственно

$$f_S(t) = kv(t), \quad (17.7a)$$

где $v(t)$ определяется выражением (17.5).

Однако при анализе более сложных систем удобно использовать другую форму записи. Из рассмотрения свободных незатухающих колебаний уравнение равновесия имеет вид

$$f_I + f_S = 0, \quad (17.8)$$

в котором при гармонических колебаниях

$$f_I = m\ddot{v}(t) = -m\omega^2 v(t). \quad (17.9)$$

Подставляя (17.5) и (17.9) в (17.8), получим для упругой силы

$$f_S(t) = m\omega^2 v(t) = m\omega V(t). \quad (17.7b)$$

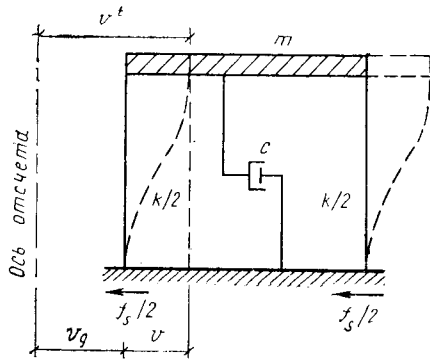


Рис. 17.1. Одномассовый осциллятор при поступательном возмущении основания

Эквивалентность (17.7a) и (17.7б) следует из выражения $\omega^2 = k/m$.

Выражение (17.7б) не означает, что $\omega^2 v(t)$ есть полное ускорение массы, так как в системе кроме силы инерции возникает диссипативная сила. Выражение для полного ускорения может быть получено решением уравнения (17.1) с учетом $c/m = 2\xi\omega$. Тогда

$$\ddot{v}(t) = -2\xi\omega\dot{v}(t) - \omega^2 v(t).$$

Если теперь предположить, что в связи с небольшим влиянием силы затухания в уравнении равновесия системы затуханием можно пренебречь, то полное ускорение приближенно равно:

$$\ddot{v}(t) \approx -\omega^2 v(t) \approx \omega V(t). \quad (17.10)$$

Таким образом, сейсмическая реакция одномассовой системы в функции времени может быть определена с помощью выражений (17.5), (17.7б) и (17.10), которые содержат интеграл реакции $V(t)$. Численное определение этого интеграла для любого входного сейсмического воздействия с целью нахождения полного процесса сейсмической реакции представляет собой основную вычислительную задачу. С другой стороны, если имеется спектр колебаний основания, то максимальное значение параметров реакции системы может быть получено очень просто. Так как по определению спектр скорости представляет собой максимальное значение интеграла реакции,

$$S_v(\xi, T) \equiv V_{\max}(\xi, T), \quad (17.11)$$

то максимальные значения параметров реакции можно непосредственно определить по спектру реакции при соответствующем периоде и параметре затухания сооружения:

$$v_{\max} = \frac{1}{\omega} S_v(\xi, T) = S_d(\xi, T);$$

$$f_{s, \max} = m\omega S_v(\xi, T) = mS_a(\xi, T);$$

$$\ddot{v}_{\max} \approx S_a(\xi, T).$$

Таким образом, спектр перемещений реакции определяет максимальное перемещение, произведение массы на спектр ускорений — максимальную восстанавливающую силу, спектр ускорения — величину максимального ускорения.

Пример 17.1.

Пусть система на рис. 17.1 имеет следующие параметры:

$$m = 2 \text{ киллофунта} \cdot \text{с}^2/\text{дюйм} [0,357 \text{ тс} \cdot \text{с}^2/\text{см}]; \quad k = 60 \text{ киллофунт}/\text{дюйм} [10,7 \text{ тс}/\text{см}];$$

$$c = 0,438 \text{ киллофунт} \cdot \text{с}/\text{дюйм} [0,078 \text{ тс} \cdot \text{с}/\text{см}].$$

Найдем максимальное перемещение и максимальную сейсмическую нагрузку при сейсмическом воздействии, заданном в виде спектра скорости реакции, показанного на рис. 17.2.

Сначала необходимо определить период собственных колебаний и параметр затухания конструкции:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{60}{2}} = 5,48 \text{ рад/с};$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5,48} = 1,147 \text{ с};$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{0,438}{2 \cdot 2 \cdot 5,48} = 0,02.$$

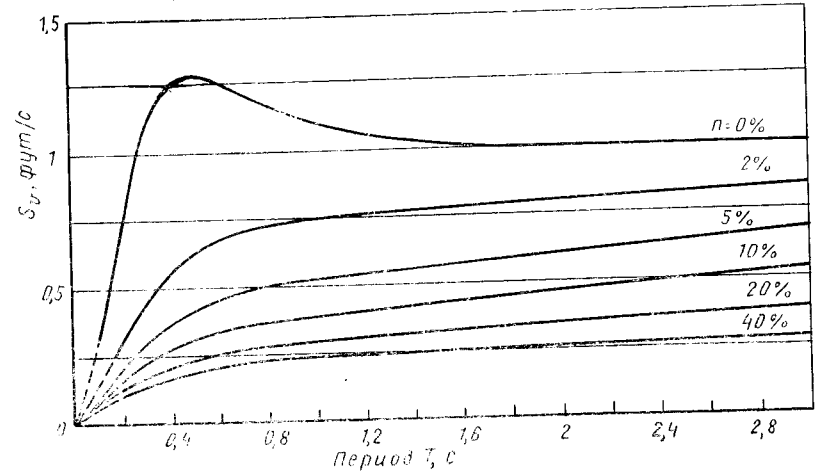


Рис. 17.2. Средние спектры скоростей реакции

В соответствии с рис. 17.2 при $T = 1,147$ с и $\xi = 0,02$ спектральная скорость $S_v = 0,75$ фут/с [0,228 м/с]. Следовательно, максимальное перемещение системы при указанном воздействии

$$v_{\max} = \frac{S_v}{\omega} = \frac{0,75}{5,48} = 0,137 \text{ фута} [0,042 \text{ м}].$$

Максимальная сейсмическая нагрузка может быть определена двумя способами:

$$\mathcal{P}_{0, \max} = kv_{\max} = 60 \cdot 12 \cdot 0,137 = 12 \cdot 8,22 = 98,64 \text{ киллофунта} (45 \text{ тс});$$

$$\mathcal{P}_{0, \max} = mS_a = m\omega S_v = 2 \cdot 5,48 \cdot 0,75 = 2 \cdot 12 \cdot 5,48 \cdot 0,75 = 12 \cdot 8,22 \text{ киллофунта} (45 \text{ тс}).$$

17.2.2. Обобщенные системы с одной степенью свободы

Любое сооружение можно рассматривать как систему с одной степенью свободы, если предположить, что ее перемещения ограничены одной формой колебаний, как показано в ч. 1. Такая модель в виде системы с обобщенной координатой может с успехом использоваться в сейсмостойком строительстве. Единственная особенность такой модели состоит в необходимости определения обобщенной восстанавливающей силы при возмущении основания.

Для сооружения башенного типа (рис. 17.3) уравнение колебания в форме обобщенной координаты (с учетом сил инерции, затухания и упругости, распределенных вдоль вертикальной оси) имеет вид

$$f_I(x, t) + f_D(x, t) + f_S(x, t) = 0. \quad (17.12)$$

Основная предпосылка при моделировании сооружений в виде системы с одной степенью свободы заключается в том, что перемещения системы представляются произведением коэффициента формы $\psi(x)$ и амплитуды колебаний $Y(t)$ по обобщенной координате

$$v(x, t) = \psi(x) Y(t). \quad (17.13)$$

Если представить виртуальное перемещение в форме $\delta v = \psi(x) \delta Y$, то согласно принципу возможных перемещений уравнение равновесия для системы с одной степенью свободы

$$f_I^* \delta Z + f_D^* \delta Z + f_S^* \delta Z = 0, \quad (17.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_I^* &= \int_0^L f_I(x, t) \psi(x) dx; \\ f_D^* &= \int_0^L f_D(x, t) \psi(x) dx; \\ f_S^* &= \int_0^L f_S(x, t) \psi(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (17.15)$$

Поскольку распределения силы упругости и затухания предполагаются зависимыми от относительных перемещений, обобщенные силы определяются выражениями, приведенными в ч. 1, причем динамическая нагрузка считается внешней:

$$f_D^* = c^* \dot{Z}; \quad f_S^* = k^* Z,$$

где c^* и k^* определяются выражениями (1.38) и (1.39).

Так как местные силы инерции зависят от полного ускорения, то

$$f_I(x, t) = m(x) \ddot{v}(x, t).$$

Поскольку $v^t(x, t) = v(x, t) + v_g(t) = \psi(x)Z(t) + v_g(t)$, обобщенная сила инерции

$$f_I^* = \ddot{Z}(t) \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx + \ddot{v}_g(t) \int_0^L m(x) \psi(x) dx.$$

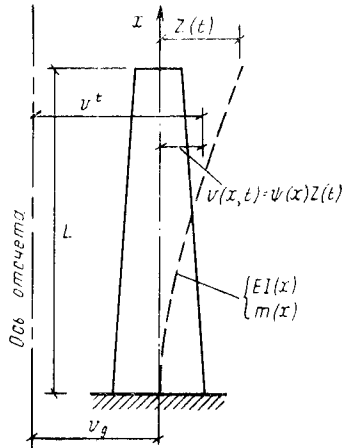


Рис. 17.3. Обобщенная система с одной степенью свободы при поступательном возмущении жесткой заделки

Подстановка всех слагаемых в уравнение (17.14) приводит к уравнению колебаний

$$m^* \ddot{Z}(t) + c^* \dot{Z}(t) + k^* Z(t) = -\mathcal{L} \ddot{v}_g(t), \quad (17.16)$$

где

$$m^* = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx; \quad (17.17)$$

$$\mathcal{L} = \int_0^L m(x) \psi(x) dx. \quad (17.18)$$

Уравнение (17.17) эквивалентно условию (1.47) для обобщенной массы, а величина \mathcal{L} , определяемая (17.18), представляет собой коэффициент сейсмического возмущения и характеризует уровень возможных колебаний сооружения по форме $\psi(x)$.

Если пренебречь знаком эффективной сейсмической нагрузки в (17.16) и поделить ее на обобщенную массу, то

$$\ddot{Z} + 2\xi\omega\dot{Z} + \omega^2 Z = \frac{\mathcal{L}}{m^*} \ddot{v}_g(t). \quad (17.19)$$

По аналогии с анализом системы с одной степенью свободы решение уравнения (17.19) имеет вид

$$Z(t) = \frac{\mathcal{L}}{m^* \omega} V(t), \quad (17.20)$$

и, следовательно, перемещения

$$v(x, t) = \frac{\psi(x) \mathcal{L}}{m^* \omega} V(t). \quad (17.21)$$

Сравнивая (17.5) и (17.20), можно заметить, что коэффициент \mathcal{L}/m^* характеризует различие между реакцией одномассовых систем с сосредоточенной и обобщенной массами. Этот коэффициент зависит от распределения масс, а также от формы колебаний сооружения и в общем случае отличен от 1.

В принципе силы упругости, возникающие при сейсмических воздействиях, могут быть определены с помощью выражения (17.21) для перемещений системы, влияющих на жесткостные характеристики элементов. Однако при такой форме записи инерционные силы для обобщенных координат зависят от производных перемещений и, следовательно, коэффициентов формы $\psi(x)$. Поэтому местные нагрузки определяются в результате такого расчета с меньшей точностью, чем перемещения. Более четкое определение сил упругости может быть получено, если их выразить в функции сил инерции свободных колебаний в соответствии с общим подходом, изложенным для одномассовой системы. Уравнение незатухающих свободных колебаний может быть получено из (17.12). Тогда сила инерции при гармонических собственных колебаниях

$$f_I(x, t) = m(x) \ddot{v}(x, t) = -\omega^2 m(x) v(x, t),$$

и соответствующее уравнение принимает вид

$$-\omega^2 m(x) v(x, t) + f_S(x, t) = 0. \quad (17.22)$$

Если теперь определить перемещения в виде уравнения (17.13), то равновесие сил в соответствии с (17.22) в общем случае удовлетворяться не будет, так как предполагаемая форма колебаний локально не удовлетворяет уравнению равновесия. Если же в это выражение ввести возможное перемещение, то для получения общего условия равновесия можно использовать принцип возможных перемещений

$$\delta Z \int_0^L [-\omega^2 m(x) v(x, t) + f_S(x, t)] \psi(x) dx = 0.$$

С другой стороны, даже если это справедливо только в интегральном или средневзвешенном смысле, условие (17.22) дает лучшую достижимую оценку сил упругости, возникающих в сооружениях:

$$f_S(x, t) = \omega^2 m(x) v(x, t) = m(x) \psi(x) \frac{\mathcal{L}}{m^*} \omega V(t). \quad (17.23)$$

Из распределенных сил упругости, которые показаны на рис. 17.4, любую равнодействующую можно найти методами статики. Например, сдвигающая сила \mathcal{V}_0^v в основании здания

$$\mathcal{V}_0^v(t) = \int_0^L f_S(x, t) dx = \frac{\mathcal{L}}{m^*} \omega V(t) \int_0^L m(x) \psi(x) dx, \quad (17.24)$$

что эквивалентно

$$\mathcal{V}_0^v(t) = \frac{\mathcal{L}^2}{m^*} \omega V(t).$$

Аналогично момент в основании $\mathcal{M}_0(t) = \int_0^L f_S(x, t) x dx,$

$$\mathcal{M}_0(t) = \frac{\mathcal{L}}{m^*} \omega V(t) \int_0^L m(x) \psi(x) x dx. \quad (17.25)$$

Выражения для момента и перерезывающей силы в любом сечении:

$$\mathcal{V}_h(t) = \frac{\mathcal{L}}{m^*} \omega V(t) \int_h^L m(x) \psi(x) dx;$$

$$\mathcal{M}_h(t) = \frac{\mathcal{L}}{m^*} \omega V(t) \int_h^L m(x) \psi(x) x dx.$$

Конечно, для определения величин (17.21) и (17.23) в функции времени требуется численное интегрирование интеграла сейсмической реакции $V(t)$. Однако максимальные значения реакции мо-

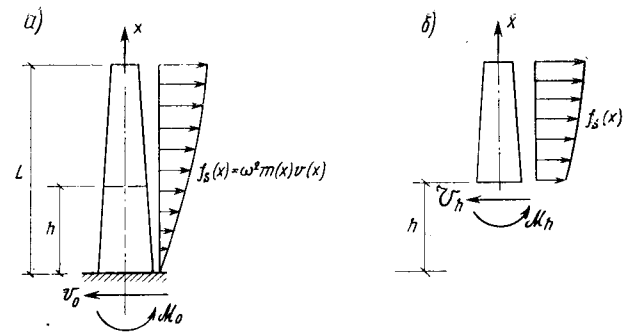


Рис. 17.4. Силы упругой реакции обобщенной системы с одной степенью свободы
а — силы в основании; б — усилия в сечении

гут быть получены с помощью спектров реакции путем определения ординат, соответствующих периодам колебаний и параметрам затухания. Например, максимальное перемещение и упругие силы можно найти с помощью формул:

$$v_{\max}(x) = \psi(x) \frac{\mathcal{L}}{m^*} S_d(\xi, T);$$

$$f_{S, \max}(x) = m(x) \psi(x) \times \frac{\mathcal{L}}{m^*} S_a(\xi, T).$$

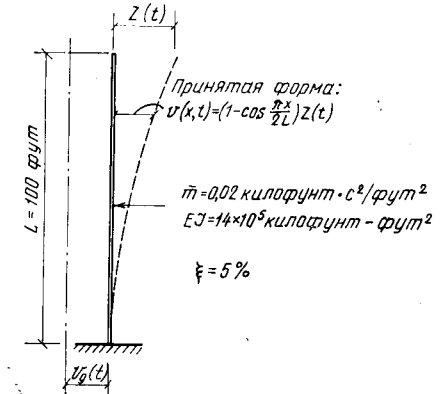


Рис. 17.5. Представление консольной колонны идеализированной системой с одной степенью свободы
($m=0,098$ тс·с²/м²; $L=30,5$ м; $EI=5,88 \cdot 10^4$ тс·м²)

Пример 17.2. Применение метода анализа сейсмической реакции системы с одной степенью свободы и обобщенной массой будет показано на примере консольной колонны постоянного поперечного сечения (рис. 17.5) при колебаниях основания по закону $v_g(t)$, для которого спектр скоростей реакции изображен на рис. 17.2. Предполагается, что форма колебаний колонны $\psi(x) = 1 - \cos(\pi x/2L)$ и, следовательно, параметры сооружения аналогичны примеру 1.3:

$$m^* = 0,228 \bar{m} L = 0,456 \text{ киллофунт} \cdot \text{с}^2 / \text{фут} \quad (0,678 \text{ тс} \cdot \text{с}^2 / \text{м});$$

$$k^* = \frac{\pi^4 EI}{32 L^3} = 4,26 \text{ киллофунт} / \text{фут} \quad (6,39 \text{ тс} / \text{м}); \quad \mathcal{L} = 0,364 \bar{m} L = 0,728 \text{ киллофунт} \cdot \text{с}^2 / \text{фут} \quad (1,08 \text{ тс} \cdot \text{с}^2 / \text{м}),$$

откуда круговая частота колебаний колонны

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = 3,056 \text{ рад} / \text{с}$$

и период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2,056 \text{ с.}$$

Для этого периода и заданного параметра затухания (5% от критического) спектральная скорость, согласно рис. 17.2, равна

$$S_v = 0,62 \text{ фут/с } [0,188 \text{ м/с}].$$

Тогда максимальное перемещение по обобщенной координате

$$Z_{\text{макс}} = \frac{\mathcal{L}}{m^*\omega} S_v = 0,324 \text{ фут} = 0,099 \text{ м}$$

и максимальные перемещения колонны

$$v_{\text{макс}} = 0,324 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) \text{ фут} = 0,099 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) \text{ м}.$$

Аналогично максимум сдвигающей нагрузки в основании, как и в (17.24),

$$v_{0, \text{макс}}^* = \frac{\mathcal{L}^2}{m^*} \omega S_v = 2,202 \text{ килофунта } [0,998 \text{ тс}],$$

и максимум распределенных инерционных нагрузок на колонну

$$f_{S, \text{макс}} = \frac{\bar{m}\psi(x)^*}{\mathcal{L}} v_{0, \text{макс}}^* = 0,06 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) \text{ килофунт/фут} = \\ = 0,089 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) \text{ тс/м}.$$

17.2.3. Системы со многими степенями свободы и сосредоточенными параметрами. Формулировка методов анализа сейсмической

реакции систем со многими степенями свободы и сосредоточенными массами может быть выполнена в векторно-матричной форме, аналогичной по постановке рассмотренным методам анализа систем с одной степенью свободы. Для многоэтажного здания, показанного на рис. 17.6, уравнения колебаний по аналогии с (17.1) могут быть представлены в виде

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = 0 \quad (17.26)$$

и эффективные сейсмические нагрузки получены в функции суммы относительных перемещений и смещения основания. Для системы на рис. 17.6 получаем:

$$v^t = v + \{1\}v_g, \quad (17.27)$$

где $\{1\}$ — единичный вектор-столбец.

Этот вектор свидетельствует о том, что единичное статическое перемещение основания сооружения вызывает единичное перемещение по всем степеням свободы. Конечно, такое простое соотношение обусловлено ти-

пом кинематического возмущения опор, а также схемой сооружения. Для других конструктивных схем и типов кинематического воздействия вектор статических перемещений будет другим. Поэтому сооружение, показанное на рис. 17.6, следует рассматривать как особый случай, хотя подавляющее большинство практических методов расчета используют указанную модель.

Подставляя выражение (17.27) в (17.26), получаем уравнения движения в относительных координатах:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p_{\text{eff}}(t), \quad (17.28)$$

где

$$p_{\text{eff}}(t) = -m\{1\}\ddot{v}_g(t). \quad (17.29)$$

Уравнение (17.28) может быть решено прямыми методами численного интегрирования системы связанных уравнений. Однако при анализе сейсмической реакции упругих систем более эффективно преобразовать систему уравнений к нормальным координатам. Таким образом, можно получить достаточно хорошую точность при анализе сейсмической реакции сооружений с десятками и даже сотнями степеней свободы путем рассмотрения только нескольких нормальных форм колебаний.

Преобразование к нормальным координатам было детально рассмотрено в гл. 12. Если предположить, что матрица затуханий представлена в форме, удовлетворяющей условиям ортогональности для матриц масс и жесткостей¹, то система N несвязанных уравнений колебаний в нормальных координатах имеет вид

$$M_n \ddot{Y}_n + C_n \dot{Y}_n + K_n Y_n = P_n(t), \quad (17.30)$$

где M_n, C_n, K_n — обобщенные характеристики колебаний по n -й форме [см. уравнение (12.15)]; Y_n — амплитуда колебаний по главной форме.

Обобщенная инерционная нагрузка [при пренебрежении знаком в уравнении (17.29)]

$$P_n = \varphi_n^T p_{\text{eff}}(t) = \mathcal{L}_n \ddot{v}_g(t), \quad (17.31)$$

где для сооружения на рис. 17.6 коэффициент сейсмической нагрузки

$$\mathcal{L}_n \equiv \varphi_n^T m \{1\}. \quad (17.32)$$

Эта матрица эквивалентна выражению (17.18), которое было получено для системы с одной степенью свободы. Коэффициенты сейсмической нагрузки различны для разных форм колебаний φ_n .

По аналогии с обобщенной системой с одной степенью свободы можно получить выражение для реакции многомассовой системы для каждой формы колебаний:

$$Y_n(t) = \frac{\mathcal{L}_n}{M_n \omega_n} V_n(t), \quad (17.33)$$

¹ Системы, для которых указанное условие не выполняется, кратко рассмотрены в разд. 17.5.

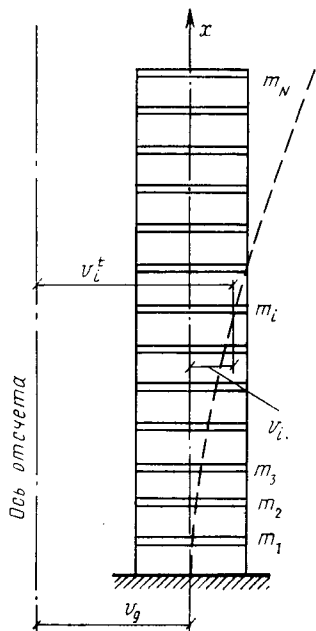


Рис. 17.6. Многомассовая система с сосредоточенными параметрами при поступательном возмущении жесткой заделки

где интеграл сейсмической реакции принят в виде (17.6) и зависит от параметра затухания ξ_n и частоты ω_n для n -й формы колебаний. Вектор относительных перемещений для этой формы принимается равным:

$$v_n(t) = \varphi_n \frac{\mathcal{L}_n}{M_n \omega_n} V_n(t). \quad (17.34)$$

Наконец, вектор относительных перемещений для всех форм колебаний определяется с помощью метода суперпозиции

$$v(x, t) = \Phi Y(t) = \Phi \left\{ \frac{\mathcal{L}_n}{M_n \omega_n} V_n(t) \right\}, \quad (17.35)$$

причем Φ определяется для всех форм колебаний, которые определяют сейсмическую реакцию сооружения, и выражение в скобках представляет собой вектор величин для всех рассматриваемых форм.

Силы упругости получаются простым умножением относительных перемещений на матрицу жесткостей

$$f_S(t) = kv(t) = k\Phi Y(t). \quad (17.36)$$

Как отмечалось при анализе систем с одной степенью свободы, часто бывает удобнее выразить силы упругости в зависимости от инерционных сил, генерируемых при собственных колебаниях без учета затухания. Эквивалентность восстанавливающих и инерционных сил устанавливается соотношением, которое является следствием решения задачи о собственных значениях

$$k\Phi = m\Phi\Omega^2, \quad (17.37)$$

где Ω^2 — диагональная матрица квадратов частот ω_n^2 .

Подставляя (17.37) в (17.36), получаем выражение для восстанавливающих сил

$$f_S(t) = m\Phi\Omega^2 Y(t) = m\Phi \left\{ \frac{\mathcal{L}_n}{M_n} \omega_n V_n(t) \right\}. \quad (17.38)$$

Можно показать, что вектор сил упругости связан с каждой формой колебаний

$$f_{Sn}(t) = m\varphi_n \frac{\mathcal{L}_n}{M_n} \omega_n V_n(t), \quad (17.39)$$

который является эквивалентом выражения для обобщенной системы с одной степенью свободы (17.23) в матричной форме. Следует подчеркнуть, что (17.38) представляет собой достаточно общее выражение для упругих (восстанавливающих) сил, развиваемых в демпфированной системе при соответствующих колебаниях грунта. Тот факт, что оно получено из анализа незатухающих свободных колебаний, не ограничивает области его применимости.

Когда распределение эффективных упругих сил в любой момент времени t в период землетрясения уже определено, как например на рис. 17.7, значение любых результирующих усилий в тот же мо-

мент времени определяется стандартными методами статики сооружений. Так, сдвигающая сила в основании здания $\mathcal{V}'_o(t)$ для системы на рис. 17.7 определяется суммой сил для всех этажей

$$\mathcal{V}'_o(t) = \sum_{i=1}^N f_{Si}(t) = [1]F_S(t),$$

где $[1]$ — единичный вектор-строка. Подставляя равенство (17.38) в это выражение, получаем:

$$\mathcal{V}'_o(t) = \sum_{n=1}^N \frac{\mathcal{L}_n^2}{M_n} \omega_n V_n(t), \quad (17.40)$$

где, как отмечалось, $[1]M\Phi = [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_N]$.

Аналогично опрокидывающий момент в основании здания

$$M_o(t) = \sum_{i=1}^N x_i f_{Si}(t) = [x]f_S(t),$$

причем x_i — расстояние массы i до основания здания; $[x]$ — вектор-строка этих высот.

После подстановки (17.38) в выражение для опрокидывающего момента оно принимает вид

$$M_o(t) = [x]M\Phi\Omega^2 Y(t) = \\ = [x]M\Phi \left\{ \frac{\mathcal{L}_n}{M_n} \omega_n V_n(t) \right\}. \quad (17.41)$$

Величина \mathcal{L}_n^2/M_n в (17.40) имеет размерность массы и часто называется *эффективной модальной массой* сооружения, так как ее можно рассматривать как часть полной массы, относящуюся к определенной форме колебания. Такая трактовка целесообразна только для сооружения (см. рис. 17.6), которое имеет сосредоточенные массы, расположенные вдоль вертикальной оси. Для таких зданий полная масса

$$M_T = [1]m\{1\}. \quad (17.42)$$

Теперь можно показать, что сумма всех эффективных модальных масс равна полной массе, выражая единичный вектор в нормальных координатах как

$$\{1\} = \Phi Y,$$

где каждая амплитуда Y_n вычисляется умножением слева и справа на $\varphi_n^T m$ с учетом условия ортогональности масс

$$\varphi_n^T m\{1\} = \varphi_n^T m\Phi Y = M_n Y_n.$$

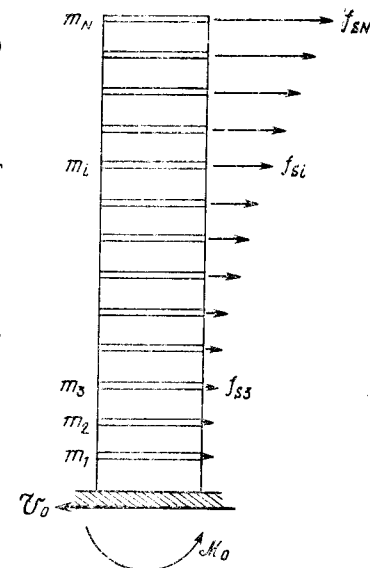


Рис. 17.7. Силы упругой реакции системы со многими степенями свободы

Поскольку \mathcal{L}_n представляет собой нижнюю треугольную матрицу, амплитуда колебаний по каждой форме может быть записана в виде $Y_n = \mathcal{L}_n/M_n$, а совокупность Y_n определяется вектором

$$\{1\} - \Phi \left\{ \frac{\mathcal{L}_n}{M_n} \right\}. \quad (17.43)$$

Подставляя (17.43) в (17.42), получаем:

$$M_T = [1] m \Phi \left\{ \frac{\mathcal{L}_n}{M_n} \right\} = [\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \dots \mathcal{L}_N] \left\{ \frac{\mathcal{L}_n}{M_n} \right\} = \sum_{n=1}^N \frac{\mathcal{L}_n^2}{M_n}. \quad (17.44)$$

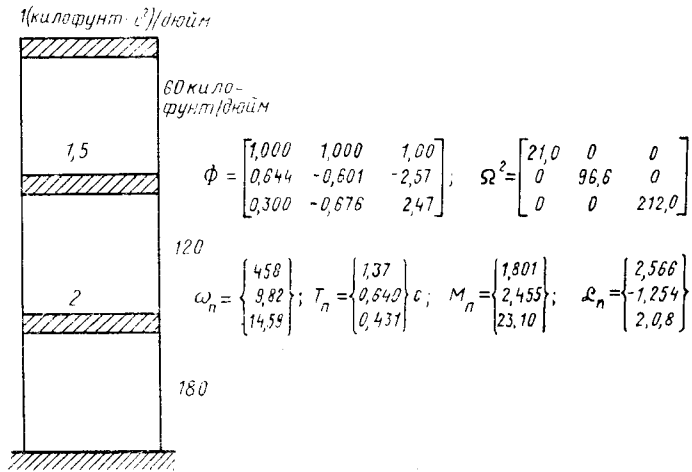


Рис. 17.8. Рама здания и ее динамические характеристики

Следовательно, вклад каждой формы $\mathcal{V}_{on}(t)$ в общее выражение для сдвигающей силы в основании здания (17.40) может рассматриваться как реакция эффективной модальной массы на эффективное модальное ускорение грунта $\omega_n V_n(t)$.

Пример 17.3. Анализ сейсмической реакции системы со многими степенями свободы может быть рассмотрен применительно к трехэтажному зданию, показанному на рис. 17.8. Этот пример взят по аналогии с примером 11.1, однако жесткость здания уменьшена в 10 раз, чтобы получить частоты, характерные для более высоких зданий, в которых влияние высших форм колебаний на параметры сейсмической реакции более существенно. Динамические характеристики, обобщенные массы и коэффициенты сейсмической реакции также приведены на рис. 17.8. Предполагается, что затухание систем равно 5% от критического для всех форм колебаний.

Для заданных частот и параметров затухания определен интеграл $V_1(t)$ реакции по первой форме для продолжительности сейсмического воздействия $v_g(t)$. Максимум этого интеграла имеет место при $t_1 = 3,08$ с. Аналогично определены интегралы сейсмической реакции для второй и третьей форм колебаний, и в результате вектор модальных интегралов реакции

$$V(t_1) = \begin{bmatrix} 1,74 \\ 1,22 \\ 0,77 \end{bmatrix} \text{ фут/с} = \begin{bmatrix} 0,529 \\ 0,371 \\ 0,234 \end{bmatrix} \text{ м/с}.$$

Если эти величины, а также другие характеристики колебаний внести в уравнение (17.33), то значения перемещений по главным фермам для этого момента времени

$$Y(t_1) = \left\{ \frac{\mathcal{L}_n}{M_n \omega_n} V_n(t_1) \right\} = \begin{bmatrix} 0,541 \\ 0,0635 \\ 0,00475 \end{bmatrix} \text{ фут} = \begin{bmatrix} 0,164 \\ 0,019 \\ 0,0014 \end{bmatrix} \text{ м}$$

и суммарные перемещения

$$v(t_1) = \Phi Y(t_1) = \begin{bmatrix} 0,541 + 0,064 + 0,005 \\ 0,348 - 0,038 - 0,012 \\ 0,162 - 0,043 + 0,012 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,610 \\ 0,298 \\ 0,131 \end{bmatrix} \text{ фут} = \begin{bmatrix} 0,185 \\ 0,091 \\ 0,040 \end{bmatrix} \text{ м}.$$

Аналогично вектор упругих сил для $t_1 = 3,08$ с

$$f_S(t_1) = m \Phi \left\{ \frac{\mathcal{L}_n}{M_n} \omega_n V_n(t_1) \right\} = \begin{bmatrix} 11,35 + 6,13 + 1,01 \\ 10,95 - 5,53 - 3,90 \\ 6,80 - 8,29 + 5,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18,49 \\ 1,52 \\ 3,51 \end{bmatrix} \text{ килофунты} = \begin{bmatrix} 8,376 \\ 0,689 \\ 1,590 \end{bmatrix} \text{ тс},$$

и сейсмическая нагрузка в основании здания $\mathcal{V}_0(t_1) = 23,52$ килофунта [10,65 тс].

Для вычисления параметров сейсмической реакции системы со многими степенями свободы и сосредоточенными массами в любой момент времени t с использованием выражений (17.35) или (17.38) необходимо определить интеграл сейсмической реакции для каждой формы колебаний при фиксированном t . Следовательно, для определения максимальных значений параметров сейсмической реакции требуется для каждой формы определить весь процесс изменения параметров, а затем выделить максимум анализируемых величин. Такой подход, естественно, довольно сложен с точки зрения объема вычислений. Поэтому анализ реакции по спектрам сейсмической реакции более предпочтителен.

Для каждой нормальной формы колебаний максимумы параметров реакции определяются непосредственно по спектрам реакции как для систем с одной степенью свободы. Например, для n -й формы колебаний в соответствии с (17.34) максимальное перемещение

$$v_{n, \text{ макс}} = \varphi_n \frac{\mathcal{L}_n}{M_n} S_d(\xi_n, T_n), \quad (17.45)$$

где $S_d(\xi_n, T_n)$ — спектральное перемещение, соответствующее затуханию и периоду n -й формы колебаний.

В соответствии с (17.39) вектор максимальных восстанавливающих (упругих) сил для этой же формы

$$f_{S_n, \text{ макс}} = m \varphi_n \frac{\mathcal{L}_n}{M_n} S_a(\xi_n, T_n), \quad (17.46)$$

где $S_a(\xi_n, T_n)$ — ордината спектра ускорений.

Максимальные значения параметров реакции не могут быть получены простым суммированием максимальных величин для раз-

ных форм, так как последние достигаются не одновременно. В большинстве случаев, когда параметр для одной из форм достигает максимума, параметры для других форм меньше своих экстремальных значений. Поэтому хотя сложение спектральных величин дает заведомо верхние оценки общей реакции систем, оно часто приводит к неоправданному завышению максимальных значений.

Для получения более разумных оценок расчетных величин спектров реакций предложен ряд различных способов. Наиболее простой и широко используемый из них заключается в определении среднеквадратического значения максимумов параметров для разных форм. Если перемещения вычислены с помощью (17.45), то максимальное полное перемещение приближенно равно:

$$v_{\text{макс}} \approx \sqrt{(v_1)_{\text{макс}}^2 + (v_2)_{\text{макс}}^2 + \dots}, \quad (17.47)$$

а максимальная упругая сила для определенного этажа

$$f_{S, \text{макс}} \approx \sqrt{(f_{S_1})_{\text{макс}}^2 + (f_{S_2})_{\text{макс}}^2 + \dots} \quad (17.48)$$

Пример 17.4. Покажем, как выполняются расчеты для здания, рассмотренного в примере 17.3. В качестве сейсмического воздействия принято землетрясение, спектр которого дан на рис. 17.2, а ординаты увеличены в 3 раза (это позволяет получить параметры сейсмической реакции, близкие к реакции на землетрясение в примере 17.3).

При затухании 5% от критического и периодах колебаний согласно примеру 17.3 модальные спектральные скорости (см. рис. 17.2), умноженные на 3, равны:

$$S_v = \begin{bmatrix} 1,74 \\ 1,41 \\ 1,20 \end{bmatrix} \text{ фут/с} = \begin{bmatrix} 0,529 \\ 0,429 \\ 0,365 \end{bmatrix} \text{ м/с}.$$

Тогда максимальные перемещения по разным формам, определяемые выражением

$$v_{n, \text{макс}} = \varphi_n \frac{L_n}{M_n} \frac{S_{vn}}{\omega_n},$$

равны:

$$v_{1, \text{макс}} = \begin{bmatrix} 0,541 \\ 0,348 \\ 0,162 \end{bmatrix} \text{ фут} = \begin{bmatrix} 0,169 \\ 0,106 \\ 0,049 \end{bmatrix} \text{ м}; \quad v_{2, \text{макс}} = \begin{bmatrix} 0,074 \\ 0,044 \\ 0,050 \end{bmatrix} \text{ фут} = \begin{bmatrix} 0,022 \\ 0,013 \\ 0,015 \end{bmatrix} \text{ м};$$

$$v_{3, \text{макс}} = \begin{bmatrix} 0,008 \\ 0,019 \\ 0,018 \end{bmatrix} \text{ фут} = \begin{bmatrix} 0,002 \\ 0,006 \\ 0,005 \end{bmatrix} \text{ м}.$$

Сложение максимальных параметров, вычисленных по разным формам, с использованием среднеквадратичной оценки дает значения

$$v_{\text{макс}} \approx \begin{bmatrix} 0,546 \\ 0,351 \\ 0,170 \end{bmatrix} \text{ фут} = \begin{bmatrix} 0,166 \\ 0,107 \\ 0,052 \end{bmatrix} \text{ м},$$

которые свидетельствуют о том, что вклад высших форм колебаний не очень значителен.

Аналогично получены максимальные значения упругих сил по разным формам колебаний:

$$f_{S_n, \text{макс}} = m \varphi_n \frac{L_n}{M_n} \omega_n S_{vn}$$

$$f_{S_1, \text{макс}} = \begin{bmatrix} 11,35 \\ 10,95 \\ 6,80 \end{bmatrix} \text{ килофунты} = \begin{bmatrix} 5,14 \\ 4,96 \\ 3,12 \end{bmatrix} \text{ тс}; \quad f_{S_2, \text{макс}} = \begin{bmatrix} 7,08 \\ 6,39 \\ 9,58 \end{bmatrix}$$

$$\text{килофунт} = \begin{bmatrix} 3,20 \\ 2,89 \\ 4,34 \end{bmatrix} \text{ тс}; \quad f_{S_3, \text{макс}} = \begin{bmatrix} 1,57 \\ 6,08 \\ 7,79 \end{bmatrix} \text{ килофунт} = \begin{bmatrix} 0,71 \\ 2,75 \\ 3,53 \end{bmatrix} \text{ тс},$$

и суммарные поэтажные сейсмические нагрузки

$$f_{S, \text{макс}} = \begin{bmatrix} 13,47 \\ 14,06 \\ 14,10 \end{bmatrix} \text{ килофунт} = \begin{bmatrix} 6,10 \\ 6,37 \\ 6,39 \end{bmatrix} \text{ тс}. \quad (a)$$

В заключение по формуле

$$\mathcal{V}_0^n = \frac{\mathcal{L}_n^2}{M_n} \omega_n S_{vn}$$

определены составляющие сдвигающей нагрузки в основании здания $\mathcal{V}_{01, \text{макс}} = 29,13$ килофунта = 13,19 тс; $\mathcal{V}_{02, \text{макс}} = 8,87$ килофунта = 4,02 тс; $\mathcal{V}_{03, \text{макс}} = 3,28$ килофунта = 1,48 тс и среднеквадратичное значение сдвига

$$\mathcal{V}_0, \text{макс} = 30,6 \text{ килофунта} [13,86 \text{ тс}]. \quad (b)$$

Приведенный пример наглядно показывает, что максимальное значение сдвига (б) не может быть получено простым сложением максимумов сдвигающих сил, определенных по разным формам (а), так как эти силы возникают не одновременно.

Интересно отметить, что в данном примере эффективные модальные массы

$$\left\{ \frac{\mathcal{L}_n^2}{M_n} \right\} = \begin{bmatrix} 3,656 \\ 0,641 \\ 0,187 \end{bmatrix} \text{ килофунт} \cdot \text{с}^2 / \text{фут} = \begin{bmatrix} 5,440 \\ 0,953 \\ 0,278 \end{bmatrix} \text{ тс} \cdot \text{с}^2 / \text{м},$$

а их сумма равна 4,48 килофунт·с²/фут (6,67 тс·с²/м), что почти в точности совпадает с суммой поэтажных масс. Как отмечалось ранее, это соотношение применимо ко всем сооружениям типа многоэтажных зданий.

При расчетах с помощью (17.47) и (17.48) следует учитывать только формы колебаний, оказывающие существенное влияние на параметры реакции, а поскольку все величины входят под квадратный корень, то в большинстве случаев ограничиваются только несколькими формами. Важно подчеркнуть, что такая оценка должна применяться только к отдельным исследуемым параметрам реакции. Как показано в примере 17.4, для оценки максимального значения сдвигающей нагрузки в основании здания необходимо вычислить составляющие сдвигающих нагрузок по отдельным формам, а затем сложить их

$$\mathcal{V}_0, \text{макс} \approx \sqrt{(\mathcal{V}_{01})_{\text{макс}}^2 + (\mathcal{V}_{02})_{\text{макс}}^2 + \dots}$$

Сдвигающая сила в основании не может определяться суммированием максимальных сил $f_{S, \text{макс}}$ по высоте здания, так как знаки

местных сейсмических нагрузок исчезают при возведении этих величин в квадрат.

В начале раздела, посвященного анализу систем со многими степенями свободы и сосредоточенными массами, отмечалось, что расчет сооружения с вертикальной осью при горизонтальном возмущении, показанного на рис. 17.6, представляет собой специальный класс задач сейсмического анализа, для которых соотношение между полным и относительным перемещением имеет простую форму (17.27). В более общем случае, когда не все относительные перемещения параллельны направлению движения грунта, как, например, на рис. 17.9, общее перемещение может быть выражено в виде суммы относительного перемещения и условных статических перемещений v^s , которые являются результатом статического смещения опор здания

$$v^t = v + v^s. \quad (17.49)$$

Перемещения v^s удобно выразить с помощью вектора r коэффициентов влияния, который характеризует перемещения от единичного смещения опор.

Тогда $v^s = rv_g$ и

$$v^t = v + rv_g. \quad (17.50)$$

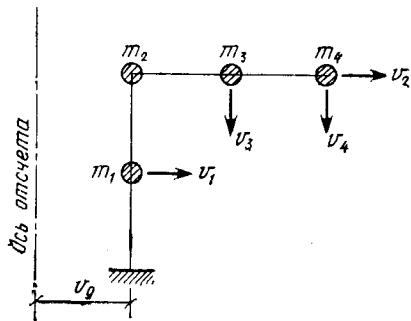
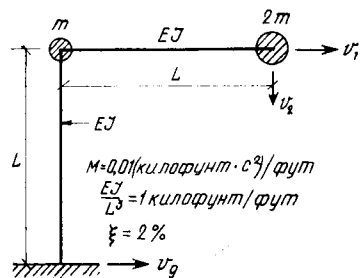


Рис. 17.9. Обобщенная система со многими степенями свободы при поступательном возмущении жесткого основания

Сравнение выражений (17.27) и (17.50) показывает, что r — единичный вектор для здания на рис. 17.6 и $r^T = [1 \ 100]$ — для системы на рис. 17.9.

Указанное обобщение влияет только на вектор эффективных нагрузок, вызываемых землетрясением. Тогда вместо (17.29), выведенного для специального случая вектора влияния статических пе-



$$m = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times 10^{-2} \frac{\text{килофунт}}{\text{фунт}} \text{ с}^2 \quad \kappa = \frac{6}{L} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \frac{\text{килофунт}}{\text{фунт}}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 0,431 & 1,000 \\ 1,000 & -0,646 \end{bmatrix} \quad \omega = \begin{bmatrix} 0,302 & 0 \\ 0 & 2,84 \end{bmatrix} \times 10^2 \text{ с}^{-2}$$

Рис. 17.10. Рама с двумя степенями свободы и ее динамические характеристики

ремещений, получим более общее выражение

$$P_{eff}(t) = -mr\ddot{v}_g(t). \quad (17.51)$$

Аналогично обобщенная форма коэффициента сейсмического воздействия вместо (17.32) примет вид

$$\mathcal{L}_n = \phi_n^T mr. \quad (17.52)$$

С учетом указанного значения \mathcal{L}_n уравнения реакции (17.33) — (17.39) полностью применимы к более общим схемам сооружений с сосредоточенными массами. Следует подчеркнуть, что упругие (восстанавливающие) силы действуют по направлениям, соответствующим перемещениям v . Тем не менее для результирующих сил (типа сдвигающая нагрузка в основании и опрокидывающий момент) можно получить другие выражения, соответствующие конструктивным схемам сооружений.

Пример 17.5. Анализ сейсмической реакции сооружения, для которого единичное статическое смещение опоры не приводит к единичным перемещениям по всем степеням свободы, будет показан на примере системы на рис. 17.10. Матрицы масс и жесткостей определены для двух степеней свободы v_1 и v_2 . Параметры сейсмической реакции равны:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,557 \\ 3,834 \end{bmatrix} m; \quad \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,293 \\ 3,000 \end{bmatrix} m;$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,49 \\ 16,86 \end{bmatrix} \text{ рад/с}; \quad \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,144 \\ 0,373 \end{bmatrix} \text{ с}.$$

Если принять, что система подвергается сейсмическому возмущению со спектром скоростей реакции, приведенным на рис. 17.2, то при 2%-ном затухании получим следующие значения скоростей реакции по нормальным формам:

$$\begin{bmatrix} S_{v_1} \\ S_{v_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,55 \end{bmatrix} \text{ фут/с} = \begin{bmatrix} 0,228 \\ 0,167 \end{bmatrix} \text{ м/с}.$$

В соответствии с (17.46) максимальные значения упругих сил:

$$f_{S_1, \text{макс}} = \{m\phi_1\} \frac{\mathcal{L}_1}{M_1} \omega S_{v_1} = \begin{bmatrix} 1,293 \\ 2,000 \end{bmatrix} \frac{1,293}{2,557} 5,49 \cdot 0,75 \cdot 10^{-2} = \begin{bmatrix} 2,69 \\ 4,16 \end{bmatrix} \times 10^{-2} \text{ килофунт} = 1,49 \begin{bmatrix} 1,293 \\ 2,000 \end{bmatrix} \frac{1,293}{2,557} 5,49 \cdot 0,228 \cdot 10^{-2} = \begin{bmatrix} 1,22 \\ 1,88 \end{bmatrix} \times 10^{-2} \text{ тс};$$

$$f_{S_2, \text{макс}} = \begin{bmatrix} 3,000 \\ -1,292 \end{bmatrix} \frac{3,000}{3,834} 16,86 \cdot 0,55 \cdot 10^{-2} = \begin{bmatrix} 21,77 \\ 9,37 \end{bmatrix} 10^{-2} \text{ килофунт} = 1,49 \times \begin{bmatrix} 3,000 \\ -1,292 \end{bmatrix} \frac{3,000}{3,834} 16,86 \cdot 0,167 \cdot 10^{-2} = \begin{bmatrix} 9,86 \\ 4,24 \end{bmatrix} \text{ тс}$$

и суммарные среднеквадратичные значения

$$f_{S_1, \text{макс}} = \begin{bmatrix} 21,94 \\ 10,25 \end{bmatrix} 10^{-2} \text{ килофунт} = \begin{bmatrix} 9,94 \\ 4,64 \end{bmatrix} 10^{-2} \text{ тс}.$$

Такие же замечания справедливы для системы, которая состоит из жесткой прямоугольной плиты, опирающейся по углам на три колонны одинакового сечения (рис. 17.11). Если в качестве степеней свободы принять поступательные перемещения x и y центра

масс и поворот плиты относительно этого центра, то $v^T = [v_1 \ v_2 \ v_3]$. При сейсмическом воздействии в направлении x вектор коэффициентов влияния $r^T = [1 \ 0 \ 0]$. После подстановки этого вектора в (17.52) можно получить коэффициенты сейсмического воздействия для отдельных форм, а с помощью выражений (17.33)—(17.39) — параметров реакции системы.

Пример 17.6. Поскольку анализ сейсмической реакции сооружений подобного типа включает в себя ряд специфических моментов, система, показанная на рис. 17.12, будет подробно рассмотрена в рамках настоящего примера. Предполагается, что три колонны, на которые опирается плита, жестко заделаны в фундамент. Поэтому жесткость колонны k при горизонтальном ее перемещении в любом направлении равна $12EI/L^3 = 5$ килофунтов/фут $= 7,44$ тс/м. Жесткостью колонн на кручение пренебрегаем.

Три степени свободы плиты учитываются в форме перемещений ее углов, как показано на рис. 17.12. Полная масса плиты $m = 0,5$ килофунтов·с²/фут $\left[0,744 \frac{\text{тс} \cdot \text{с}^2}{\text{м}} \right]$ и равномерно распределена по ее площади. Сооружение рассматривается при сейсмическом воздействии в направлении координаты v_3 , для которого спектр реакции показан на рис. 17.2. Необходимо определить максимальные перемещения плиты при этом сейсмическом воздействии.

Матрицы масс и жесткостей анализируемой системы могут быть найдены с помощью коэффициентов влияния. При определении матрицы жесткостей сначала рассматривается единичное перемещение $v_1 = 1$, а остальные координаты предполагаются фиксированными, как показано на рис. 17.13, а. Силы реакции колонн при этом перемещении указаны на том же рисунке, а уравновешивающие нагрузки — на рис. 17.13, б. Аналогично определяются коэффициенты жесткости для двух других координат.

Матрица масс вычисляется приложением единичных ускорений вдоль каждой степени свободы и нахождением результирующих инерционных сил для плиты. На рис. 17.14, а показаны единичное перемещение $v_2 = 1$ и соответствующие ему инерционные нагрузки, а на рис. 17.14, б — коэффициенты влияния массы, которые уравновешивают эти нагрузки.

Полные матрицы жесткостей и масс для системы имеют вид

$$k = \frac{12EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}; \quad m = \frac{m}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

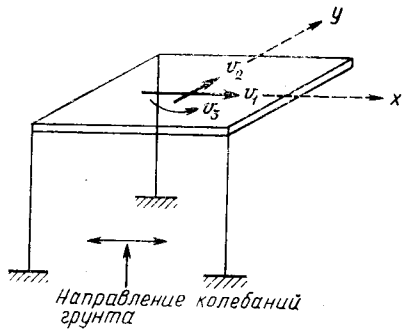


Рис. 17.11. Жесткая плита при поступательном возмущении

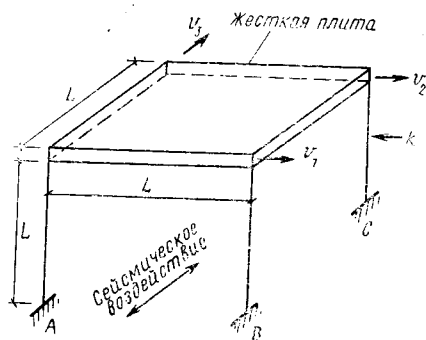


Рис. 17.12. Плита, опертая на три колонны

После решения задачи о собственных значениях $(k - \omega^2 m) \hat{v} = 0$ определяются частоты и формы колебаний:

$$\omega^2 = \begin{bmatrix} 25,36 \\ 30,00 \\ 94,64 \end{bmatrix} (\text{рад/с})^2; \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0,366 & 1,000 & -1,366 \\ 1,000 & 1,000 & 1,000 \\ 1,000 & -1,000 & 1,000 \end{bmatrix}.$$

Анализ полученных форм колебаний свидетельствует о том, что первая и третья формы характеризуют повороты плиты относительно точек на диагонали симметрии, а вторая форма — горизонтальные перемещения вдоль диагонали. Безусловно, такие формы движения можно было выявить более простым методом при соответствующем выборе системы координат. Так, наилучшей была бы система координат в виде горизонтальных перемещений центра масс вдоль двух диагоналей и поворота относительно центра масс.

Частоты и периоды собственных колебаний, спектральные скорости в соответствии с рис. 17.2 при 5%-ном затухании от критического для трех форм колебаний равны:

$$\omega = \begin{bmatrix} 5,036 \\ 5,477 \\ 9,464 \end{bmatrix} \text{ рад/с}; \quad T = \begin{bmatrix} 1,25 \\ 1,15 \\ 0,65 \end{bmatrix} \text{ с}; \quad S_D = \begin{bmatrix} 0,55 \\ 0,54 \\ 0,48 \end{bmatrix} \text{ фут/с} = \begin{bmatrix} 0,167 \\ 0,164 \\ 0,146 \end{bmatrix} \text{ м/с}.$$

Аналогично обобщенные массы M_n и коэффициенты сейсмического воздействия $\mathcal{L}_n = \Phi_n^T m r$ при $r = [0 \ 0 \ 1]$ равны:

$$M = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,0 \\ 0,5 \end{bmatrix} \text{ килофунты} \cdot \text{с}^2/\text{фут} = \begin{bmatrix} 0,744 \\ 1,488 \\ 0,744 \end{bmatrix} \text{ тс} \cdot \text{с}^2/\text{м};$$

$$L = \begin{bmatrix} 0,3415 \\ -0,5000 \\ -0,0915 \end{bmatrix} \text{ килофунты} \cdot \text{с}^2/\text{фут} = \begin{bmatrix} 0,508 \\ -0,744 \\ -0,136 \end{bmatrix} \text{ тс} \cdot \text{с}^2/\text{м}.$$

Рис. 17.13. Определение коэффициентов жесткости при $v_1 = 1$

а — перемещение $v_1 = 1$ и реакции колонн; б — усилия в колоннах и уравновешенные коэффициенты жесткости

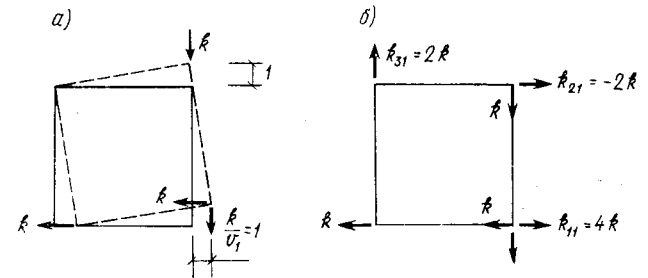
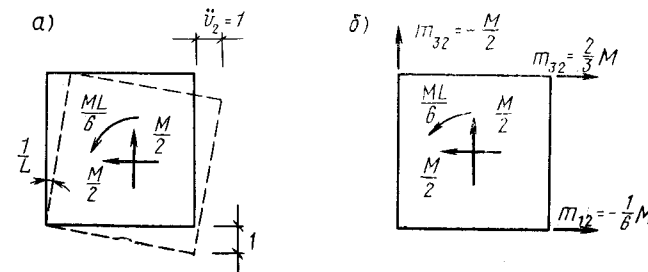


Рис. 17.14. Определение коэффициентов матрицы масс при $\ddot{v}_2 = 1$

а — ускорение $\ddot{v}_2 = 1$ и инерционные силы; б — инерционные силы в панели и уравновешенные коэффициенты матрицы масс



Далее максимальные перемещения по главным формам

$$v_{n, \max} = \varphi_n \frac{L_n}{M_n} \frac{S_{v n}}{\omega_n}$$

соответственно равны:

$$v_{1, \max} = \begin{bmatrix} 0,0272 \\ 0,0745 \\ 0,0745 \end{bmatrix} \text{ футов} = \begin{bmatrix} 0,0083 \\ 0,0226 \\ 0,0226 \end{bmatrix} \text{ м};$$

$$v_{2, \max} = \begin{bmatrix} 0,0493 \\ 0,0493 \\ -0,0493 \end{bmatrix} \text{ футов} = \begin{bmatrix} 0,015 \\ 0,015 \\ -0,015 \end{bmatrix} \text{ м};$$

$$v_{3, \max} = \begin{bmatrix} -0,0124 \\ 0,0091 \\ 0,0091 \end{bmatrix} \text{ футов} = \begin{bmatrix} -0,0038 \\ 0,0028 \\ 0,0029 \end{bmatrix} \text{ м}.$$

Оценка общего максимального перемещения по каждой координате может быть выполнена с помощью среднеквадратических величин.

17.2.4. Сравнение с требованиями Единого строительного кода

Интересно сравнить результаты вычислений сейсмических нагрузок по ранее сформулированным подходам и в соответствии с требованиями норм США по сейсмостойкому строительству. Например, в Едином строительном коде (UBC)* одна из основных рекомендаций заключается в определении эффективной интенсивности расчетного землетрясения в виде максимальных сдвигающих нагрузок в основании здания. В UBC эта величина определена выражением

$$v_{0, \max} = k \hat{C} W, \quad (а)$$

где W — нагрузка от веса здания; \hat{C} — коэффициент сейсмической нагрузки; k — коэффициент, зависящий от конструктивной схемы сооружения.

С помощью k оценивается способность конструктивной схемы поглощать энергию сейсмических колебаний. Он принимается равным от $2/3$ для каркасных зданий с жесткими узлами и колоннами и ригелями, работающими на изгиб, до $4/3$ для сооружений с жесткой конструктивной схемой, состоящих из вертикальных и горизонтальных диафрагм.

Коэффициент сейсмической нагрузки в основании здания принят в функции периода основного тона колебаний

$$\hat{C} = \frac{0,05}{\sqrt{T}}. \quad (б)$$

В UBC содержатся также рекомендации по назначению понижающего коэффициента для районов более низкой сейсмичности, для районов с самой высокой сейсмической активностью этот коэффициент принят равным единице.

Аналитическое выражение, соответствующее формуле (а) в UBC, может быть легко получено из (17.40) рассмотрением только основной формы колебаний, когда максимальные величины параметров неакции приняты в форме спектрального ускорения для этой формы

$$S_{a1} = \omega_1 V_{1, \max}.$$

В этом случае

$$v_{0, \max} \approx v_{01, \max} = \frac{L_1^2}{M_1} S_{a1} = \frac{L_1^2}{M_1} g \frac{S_{a1}}{g}, \quad (в)$$

где g — ускорение силы тяжести. Сравнение выражений (а) и (в) приводит к следующим соотношениям:

Согласно UBC: $\hat{C} \quad W$
 Согласно методу расчета: $\frac{S_{a1}}{g} \frac{L_1^2}{M_1} g.$

Таким образом, коэффициент сейсмической нагрузки в основании здания эквивалентен спектральному ускорению в долях от g , а нагрузка от общего веса здания эквивалентна нагрузке от эффективного веса от первой формы колебаний. Действительно, нагрузка от эффективного веса здания по первой форме его колебаний должна быть меньше нагрузки от общего веса. Обычно она равна от $2/3$ до $3/4$ нагрузки от веса здания, и поэтому указанное допущение достаточно условно. Однако сейсмические нагрузки, согласно UBC, зависят в основном от коэффициента сейсмической нагрузки в основании здания, и условность определения W не имеет большого значения.

Второе принципиальное положение кода относится к распределению полной горизонтальной нагрузки по высоте здания. Согласно UBC,

$$f_{Si, \max} = \frac{w_i x_i}{\sum w_i x_i} v_{0, \max}, \quad (г)$$

где f_{Si} — горизонтальная нагрузка в уровне этажа i ; w_i — вес сооружения на уровне i ; x_i — расстояние от уровня i до основания здания.

Соответствующее выражение может быть также получено из уравнения (17.39), если его записать для первой формы колебаний и максимальные нагрузки определить через ординаты спектра ускорений

$$f_{S, \max} = m \varphi_1 \frac{L_1}{M_1} S_{a1} = \frac{m \varphi_1}{L_1} \frac{L_1^2}{M_1} S_{a1}. \quad (д)$$

Принимая, что основное влияние на параметры реакции оказывают только колебания по основной форме, для горизонтальной нагрузки на уровне i после подстановки выражения (в) в (д) получим:

$$f_{Si} = \frac{m_i \varphi_{1i}}{\sum m_i \varphi_{1i}} v_{0, \max}, \quad (е)$$

* UBC — Uniform Building Code.

где коэффициент сейсмического воздействия для многомассовой системы записан в виде $\mathcal{L}_1 = \sum m_i \varphi_{1i}$.

Сравнение формул (е) и (г) показывает, что нормативное значение нагрузки характеризует реакцию многомассовой системы при прямолинейной форме деформирования $\varphi_{1i} = x_i/L$. Это допущение было принято в коде в соответствии с результатами большого числа экспериментальных исследований, которые показали, что первая форма колебаний зданий близка к прямолинейной. Таким образом, основные расчетные рекомендации УВС эквивалентны результатам анализа реакции систем по первой форме собственных колебаний, которая принята прямолинейной, а коэффициент сейсмической нагрузки в основании здания зависит от амплитуды спектра ускорений, также соответствующей основной частоте сооружения (умноженной, если выполнить более точное сопоставление, на отношение нагрузки от полного веса здания к нагрузке от эффективного модального веса). В УВС включено также указание о назначении дополнительной сейсмической нагрузки в уровне верха для зданий повышенной этажности. Этим частично учитывается влияние высших форм колебаний, однако анализ этого фактора выходит за рамки проводимого сопоставления.

17.2.5. Системы с распределенными параметрами

Вывод уравнений сейсмических колебаний систем с распределенными параметрами может выполняться методами, аналогичными изложенным ранее. Несвязанные уравнения движения в нормальных координатах имеют такой же вид, как и для систем с сосредоточенными параметрами:

$$\ddot{Y}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{P_n(t)}{M_n} = \frac{\mathcal{L}_n}{M_n} \ddot{v}_g(t). \quad (17.53)$$

Однако обобщенная масса через равномерно распределенную может быть выражена следующим образом:

$$M_n = \int_0^L \varphi_n^2(x) m(x) dx,$$

и коэффициент модального сейсмического воздействия принимает интегральную форму, эквивалентную треугольной матрице,

$$\mathcal{L}_n = \int_0^L \varphi_n(x) m(x) r(x) dx. \quad (17.54)$$

Здесь $r(x)$ — функция влияния для статических перемещений, определяющая перемещения системы при единичных перемещениях грунта $v_g = 1$.

Таким образом

$$v^s(x) = r(x) v_g. \quad (17.55)$$

Подставляя выражения M_n и \mathcal{L}_n в равенство (17.33), можно определить амплитуды параметров реакции для каждой формы. Тогда полное перемещение получается с помощью метода суперпозиции, а эквивалентом уравнения (17.35) для системы с распределенными параметрами является выражение

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) Y_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \frac{\mathcal{L}_n}{M_n \omega_n} V_n(t). \quad (17.56)$$

На практике учитываются только формы колебаний, в наибольшей степени определяющие параметры реакции, хотя в принципе возможен учет бесконечного числа форм колебаний. Аналогично выражению (17.38) распределение упругих (восстанавливающих) сил определяется формулой

$$f_s(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} m(x) \varphi_n(x) \omega_n^2 Y_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} m(x) \varphi_n(x) \frac{\mathcal{L}_n}{M_n} \omega_n V_n(t). \quad (17.57)$$

Выражения (17.56) и (17.57) характеризуют процесс изменения во времени параметров реакции систем с распределенными характеристиками. Методика определения максимальных значений параметров реакции таких сооружений совершенно идентична рассмотренной методике анализа систем с сосредоточенными параметрами и не требует дополнительных пояснений.

Хотя изложенная методика анализа систем с распределенными параметрами является достаточно общей, ее применение на практике ограничивается тем, что частоты и формы собственных колебаний могут быть получены только для очень простых систем. Поэтому более сложные системы с распределенными параметрами дискретизируются с помощью МКЭ (метода конечных элементов) с тем, чтобы их расчет можно было выполнить в матричной форме. Матричные уравнения сейсмической реакции систем по МКЭ идентичны по форме уравнениям для систем с сосредоточенными параметрами. Отличием является то, что используется запись для приведенных сосредоточенных масс и матрица масс уже не является диагональной. Если недиагональные элементы в матрице масс, которые характеризуют взаимосвязь между перемещениями опор и степенями свободы, обозначить m_g , то уравнения принимают вид

$$m\ddot{v} + m_g \ddot{v}_g + c\dot{v} + kv = 0. \quad (17.58)$$

Выражая абсолютные ускорения в виде суммы относительного и псевдостатического ускорения (17.50), получаем уравнения вида (17.28), причем эффективная сила равна:

$$P_{\text{eff}}(t) = -(m\mathbf{r} + m_g) \ddot{v}_g(t), \quad (17.59)$$

а соответствующий коэффициент модального сейсмического воздействия

$$\mathcal{L}_n = \varphi_n^T m \mathbf{r} + \varphi_n^T m_g. \quad (17.60)$$

После того как этот коэффициент определен, последующие расчеты выполняются точно так же, как и для систем с сосредоточенными параметрами. В большинстве случаев матрица взаимной связи масс m_g содержит немного ненулевых членов и второе слагаемое в (17.60) вносит небольшой вклад в общую величину коэффициента сейсмического воздействия. Однако для полноты формулировки задачи его следует учитывать в расчете.

17.3. ВОЗДЕЙСТВИЕ В ВИДЕ ПОВОРОТА ОСНОВАНИЯ

Механизм входного воздействия в уравнении (17.58) принимался в виде эффективной нагрузки в правой части. Эта величина выражается через вектор полных перемещений, который равен сумме псевдостатических перемещений системы и динамических перемещений грунта. Таким образом, специфический характер сейсмического воздействия характеризуется псевдостатическими перемещениями или, точнее, псевдостатическими коэффициентами влияния γ . Поэтому для описания любой другой формы входного сейсмического воздействия, кроме поступательных перемещений основания (рассмотренных выше), необходимо определить матрицу γ в соответствии с новыми условиями движения опор.

Рассмотрим вертикальное сооружение при колебаниях основания с малыми амплитудами поворота (рис. 17.15). Псевдостатические перемещения четко определяются жестким поворотом здания отно-

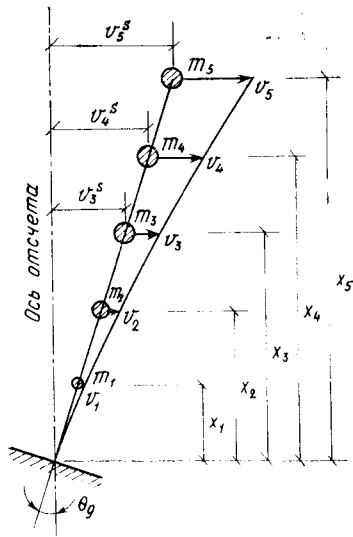


Рис. 17.15. Башня с сосредоточенными массами при повороте основания

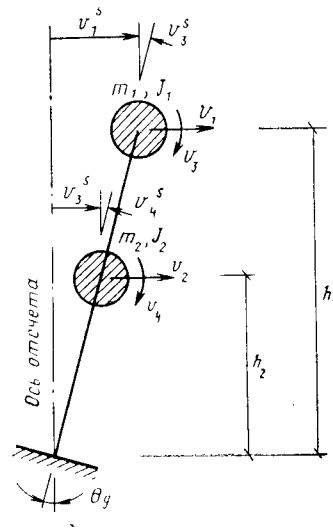


Рис. 17.16. Башня с учетом инерции поворота сосредоточенных масс

сительно основания

$$v^s = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} \theta_g. \quad (17.61)$$

Следовательно, матрица коэффициентов влияния представляет собой простую последовательность расстояний масс до основания

$$\gamma^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]. \quad (17.62)$$

Когда вектор γ используется в выражениях для эффективных сейсмических нагрузок (17.51) и модальных коэффициентов сейсмического воздействия (17.52), реакция сооружения при повороте основания может быть определена так же, как для систем при поступательных возмущениях опор.

Следует учитывать еще один параметр, который определяет реакцию сооружения при повороте основания, — эффективные сейсмические моменты, прямо пропорциональные моментам инерции вращения сосредоточенных масс и эффективным горизонтальным нагрузкам. Сооружение, показанное на рис. 17.16, имеет две массы m с моментами инерции поворота I . В уравнениях колебаний они могут быть учтены путем рассмотрения как горизонтальных, так и вращательных компонент движения вектора перемещений. Вектор псевдостатических коэффициентов влияния для всех степеней свободы определяется выражением

$$\gamma^T = [h_1 \ h_2 \ 1 \ 1].$$

где h_1 и h_2 — расстояния от центров масс до основания здания.

Существует много других типов сооружений, для которых учет инерции вращения масс при свободных колебаниях является важным (см. например, рис. 17.11). Для каждого такого случая необходимо учитывать вклад инерции поворота в величины эффективных нагрузок.

17.4. МНОГОКОМПОНЕНТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ОСНОВАНИЯ

Когда сооружение имеет больше одной точки опоры и на каждую из них передаются разные колебания грунта, общая реакция сооружения может быть получена сложением параметров реакции от каждого отдельного входного воздействия. Формы уравнений движения, выражающих параметры реакции через отдельные входные воздействия, вообще говоря, отличны от уравнений колебания систем при однокомпонентном возбуждении. Для систем с одной опорой только одна точка может испытывать перемещение, а другие независимые точки опор считаются зафиксированными от перемещений. В результате этого перемещения опор относительно друг друга вызывают в сооружении псевдостатические напряжения, которые сле-

дует учитывать в дополнение к напряжениям динамической реакции.

Если движение одной из опор, перемещения которой допускаются, обозначить v_g , то уравнение колебаний системы с обобщенными дискретными параметрами может быть выражено эквивалентно (17.58)

$$m\ddot{v}^t + m_g \ddot{v}_g + c\dot{v}^t + c_g v_g + kv^t + k_g v_g = 0, \quad (17.63)$$

где c_g и k_g — векторы затухания и связанных упругих сил, развиваемых вдоль свободных степеней свободы при колебаниях опоры.

В этом уравнении диссипативные и упругие силы выражены через полные перемещения (включая перемещения опор) для того, чтобы учесть диссипативные характеристики системы более полно, чем в (17.58). Если преобразовать уравнение (17.63) и перенести эффективные сейсмические силы в правую часть, то оно примет вид

$$m\ddot{v}^t + c\dot{v}^t + kv^t = -m_g \ddot{v}_g - c_g \dot{v}_g - k_g v_g. \quad (17.64)$$

Как отмечалось, более удобно вектор эффективных сил можно представить, если параметры реакции выразить только через динамические составляющие, т. е. исключить из полных перемещений псевдостатические компоненты. Соотношение между указанными величинами по-прежнему выражается равенствами (17.49) или (17.50). Однако в рассматриваемом случае псевдостатические перемещения не могут быть найдены методами динамики жесткого тела. Они должны определяться из уравнений статического равновесия, получаемых из (17.64), при этом пренебрегают динамическими силами (зависящими от времени). Тогда

$$kv^s = -k_g v_g, \quad (17.65)$$

где вектор перемещений v^s по определению является псевдостатическим.

Решение относительно v^s имеет вид

$$v^s = -k^{-1} k_g v_g,$$

откуда видно, что вектор псевдостатических коэффициентов влияния

$$r = -k^{-1} k_g. \quad (17.66)$$

Окончательно, подставляя (17.66) и (17.50) в (17.64), после упрощений приходим к уравнениям колебаний в терминах динамических параметров реакции

$$m\ddot{v}^t + c\dot{v}^t + kv = -(mr + m_g) \ddot{v}_g - (cr + c_g) \dot{v}_g. \quad (17.67)$$

В эти уравнения не входят параметры сил, отражающие жесткостные характеристики системы, так как

$$kr + k_g = 0.$$

Это равенство можно получить, подставив выражение (17.66) в (17.67).

Если матрица затухания пропорциональна матрице жесткостей, член в правой части (17.67), зависящий от скорости, также исчезает и выражение для эффективной нагрузки преобразуется к форме (17.59). Отсюда допущение о зависимости диссипативных сил только от относительных перемещений [на котором основано уравнение (17.59)] является рациональным для систем с затуханием, пропорциональным жесткостям. Вместе с тем оно неприменимо к системам с затуханием, пропорциональным массам. С другой стороны, доля диссипативных сил в общих эффективных сейсмических нагрузках небольшая, и ими часто пренебрегают независимо от природы затухания. В этом случае эффективная сейсмическая нагрузка на систему при многокомпонентном возбуждении определяется равенством (17.59), а псевдостатические коэффициенты влияния находятся по (17.66) в результате анализа статически неопределимых систем.

Хотя с практической точки зрения удобно вычислять реакцию систем при многокомпонентном возбуждении опор путем отдельного определения параметров реакции на каждое воздействие и их суммирования, очевидно, что (17.67) может быть легко распространено на случай совместного учета реакции системы при разных возмущениях опор. Для этого необходимо выразить все параметры колебания грунта в виде вектора $v_g(t)$ и включить все колонны в матрицу псевдостатических коэффициентов влияния и матрицы взаимосвязи (соединений) m_g и c_g .

Когда эффективная сейсмическая нагрузка определяется с помощью (17.59), анализ перемещений от каждого процесса колебаний отдельной опоры может быть выполнен аналогично анализу реакции при поступательных перемещениях основания. Такой расчет предполагает вычисление коэффициента сейсмического воздействия \mathcal{L}_n для каждой формы колебаний и каждой компоненты входного воздействия. При этом вектор формы колебаний Φ_n характеризует свободные колебания сооружения с зафиксированными опорными точками, а каждый вектор псевдостатических коэффициентов влияния r согласно (17.66) определяет перемещения от единичного смещения одной опоры при других зафиксированных.

Динамические (или относительные) перемещения системы при возбуждении только одной опоры по закону $\ddot{v}_g(t)$ определяются уравнением (17.35), в котором интеграл реакции $V_n(t)$ вычисляется для заданного сейсмического возмущения. Полная реакция на возмущение одной опоры может быть получена суммированием псевдостатических перемещений с динамическими перемещениями

$$v^t(t) = v(t) + v^s(t) = v^t + rv_g(t).$$

Рассмотренный расчет перемещений для одной компоненты многокомпонентного воздействия аналогичен расчету при поступательных колебаниях опоры сооружения. Так же может быть выполнен и анализ эффективных сейсмических нагрузок. Полные силы упру-

гости в системе являются произведением матриц жесткостей и полных перемещений

$$f_S^t = kv^t + k_g v_g.$$

Подставляя выражение для v^t , получим:

$$f_S^t = kv + (kr + k_g) v_g.$$

Псевдостатические силы в виде второго слагаемого в первой части исчезают в соответствии с определением r (17.66); таким образом, упругие силы, определенные по разным формам, зависят только от динамических перемещений и определяются уравнением (17.38).

Определение сейсмических нагрузок для рассматриваемой системы отличается от способа определения сейсмической нагрузки для системы в случае поступательного перемещения опоры, поскольку силы f_g не могут быть непосредственно найдены по упругим модальным силам f_S или динамическим перемещениям. Они зависят, кроме того, от относительных перемещений опор и должны быть выражены с помощью подматриц жесткости, характеризующих опоры:

$$f_g^t = k_g^T v^t + k_{gg} v_g,$$

где k_g^T — силы (реакции) во всех опорах при единичных перемещениях вдоль возбуждаемых степеней свободы; k_{gg} — силы (реакции) во всех опорах при единичном перемещении одной из опор.

С учетом $v^t = v + rv_g$ это выражение преобразуется к виду

$$f_g^t(t) = k_g^T v(t) + (k_{gg} - k_g^T k^{-1} k_g) v_g(t). \quad (17.68)$$

Первое слагаемое есть вектор динамических сил в опорах при динамическом реагировании, а второе слагаемое — псевдостатические силы. Именно это слагаемое является результатом статической неопределимости задачи при многокомпонентном возбуждении опор, и им нельзя пренебречь при анализе напряжений в системе. После нахождения узловых упругих сил из (17.38) и сил реакции опор (17.68) результирующие силы в любых сечениях могут быть определены классическими методами статики сооружений.

17.5. ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ ОСНОВАНИЯ НА СЕЙСМИЧЕСКУЮ РЕАКЦИЮ

17.5.1. Моделирование массива фундаментного основания

Во всех обсуждавшихся ранее случаях сейсмических воздействий предполагалось, что сейсмические движения как определенные величины передаются опорам сооружения. Считалось, что эти входные воздействия зависят только от механизма землетрясения и распространения волн и на них не влияют параметры реакции сооружения. На самом деле сооружение и грунт, на котором оно покоит-

ся, образуют связанную динамическую систему, и существенной может быть обратная связь от сооружения к пластам грунта. В этом случае сейсмическое воздействие не может определяться независимо от характеристик сооружения, как предполагалось ранее.

Степень влияния реакции сооружения на характеристики сейсмического воздействия, наблюдаемого в уровне основания здания, зависит от отношений масс и жесткостных характеристик грунта и сооружения. Поэтому физические свойства грунтового основания могут оказывать большое влияние на величины параметров реакции сооружения. Как правило, принято считать, что слой грунта влияет на параметры реакции в двух различных направлениях:

1) грунт рассматривается без сооружения и характеризуется волновыми колебаниями, распространяющимися вверх от скального основания до поверхности. Получаемые в результате ускорения поверхностного слоя без сооружения называются *движениями свободной поверхности*;

2) определяется реакция сооружения при колебаниях свободной поверхности грунта, и если взаимодействие грунта с сооружением является важным, оно учитывается в расчетах (если это взаимодействие несущественно, то колебания поверхности грунта считаются приложенными к опорам сооружения и его реакция определяется непосредственно, как указано в разд. 17.2—17.4).

В зависимости от выбора математической модели либо рассматривают массив основания в качестве среды, изменяющей параметры колебаний свободной поверхности грунта, либо рассматривают общую задачу взаимодействия в системе грунт—сооружение. Для такого анализа могут быть использованы разные модели грунта в зависимости от геометрии границ и взаимных контактов разнородных материалов, а также конструктивного решения фундаментов. Например, если слои грунта простираются горизонтально и их свойства равномерно распределены по большой площади, их можно моделировать простой одномерной системой, показанной на рис. 17.17, а. Ту же модель грунта можно использовать при анализе взаимодействия сооружения с грунтом, когда конструкции фундаментов приняты жесткими и имеют большую протяженность в плане.

В более общем случае грунты не простираются равномерно во всех направлениях, например встречаются случаи их залегания в длинных узких выемках, как показано на рис. 17.17, б. Тогда можно для представления грунта использовать двухмерную модель конечных элементов. Если сооружение имеет большую длину и расположено вдоль оси выемки, эта же модель удобна для анализа взаимодействия сооружения с грунтом.

Другой вид двухмерной модели грунта, которая признана полезной для практического анализа, характеризуется осесимметричным распределением характеристик (см. рис. 17.17, в). В этом случае предполагается, что границы грунтов и контакта материалов распределены осесимметрично (относительно оси z), а радиальная и вертикальная координаты достаточны для определения геометрии мас-

сива грунта и его модели с использованием МКЭ. Очевидно, что взаимодействие сооружения с грунтом также может быть рассмотрено в рамках этой модели, если сооружение осесимметрично относительно той же оси. Следует, однако, отметить, что горизонтальные компоненты сейсмического воздействия не являются осесимметричными. Для выполнения расчетов при таких видах нагрузки необходимо как эффективные сейсмические нагрузки, так и параметры реакции выразить в виде первых членов гармонического представления в функции угловой координаты.

В самом общем случае геометрические характеристики массива грунта и опирающегося на него сооружения должны моделироваться в пространственной (трехмерной) системе координат. При этом массив грунта представляется в виде совокупности трехмерных конечных элементов, а сооружение — комбинацией одно-, двух- и трехмерных конечных элементов в соответствии с действительной конфигурацией исследуемых объектов.

17.5.2. Влияние грунтов на параметры сейсмических колебаний. В том случае когда модели сейсмических колебаний свободной поверхности грунта, которые ожидаются на площадке предполагаемого строительства, могут быть искусственно синтезированы или выбраны из инструментально зарегистрированных акселерограмм, нет необходимости проводить специальную оценку влияния поверхностных слоев грунта на параметры сейсмических воздействий. По существу, это влияние уже содержится в записях и анализ реакции сооружений при колебаниях свободной поверхности может выполняться непосредственно. Однако очень

часто нельзя выбрать или смоделировать записи колебаний грунта, которые являются представительными для определенных грунтовых условий строительной площадки. В этом случае желательно при выполнении расчетов принять во внимание характеристики массива фундамента.

Если известны параметры сейсмических колебаний скального основания, подстилающего поверхностный слой, колебания свободной поверхности могут быть определены как для любой другой системы, для которой известны параметры колебаний входных воздействий. Используя дискретную модель, отвечающую геометрическим параметрам грунтовых напластований, и принимая сейсмическое воздействие в форме плоскопараллельного возмущения основания, можно определить характеристики колебаний поверхности грунта с использованием уравнений разд. 17.2. Цель расчетов — установление процессов колебания поверхности грунта, и с этой целью предпочтительнее проводить временной анализ, чем спектральный расчет параметров реакции. Необходимо подчеркнуть, что установление параметров колебаний свободной поверхности грунта не целесообразно выполнять независимо от анализа реакции сооружения, особенно если известны сейсмические колебания скального основания. В этом случае более эффективно рассматривать грунт и сооружение в рамках одной модели с учетом их взаимодействия.

С другой стороны, когда известны сейсмические колебания на поверхности для грунтовых условий, которые существенно отличаются от условий на предполагаемой площадке строительства, полезно отдельно учитывать влияние грунтовых условий на параметры колебаний грунта. При этом сначала с помощью обратного преобразования (решения обратной задачи) по заданной записи колебаний грунта определяют параметры движения скального основания, а затем прямым анализом находят компоненты колебаний на поверхности расчетных напластований грунта. Отметим, что как обратная, так и прямая задача учета влияния грунтовых условий может быть сформулирована в рамках теории распространения волн, если слои грунта горизонтальны и могут быть смоделированы одномерными системами. В более общем случае анализ должен выполняться с использованием матричных методов и дискретных моделей МКЭ. Именно этот случай будет подробно рассмотрен ниже.

Хотя характер распространения сейсмических волн вверх от скального основания к поверхности грунта может быть рассмотрен с помощью временного анализа (см. разд. 17.2), более удобно и эффективно решать обратную задачу — определение параметров движения основания по записям колебаний поверхностного слоя на основании частотного анализа. Удобно также использовать частотный анализ для решения обеих задач.

В разд. 6.4 было показано, что реакция $y(t)$ любой линейной колебательной системы при воздействии $x(t)$ может быть получена с помощью комплексной частотной характеристики реакции систе-

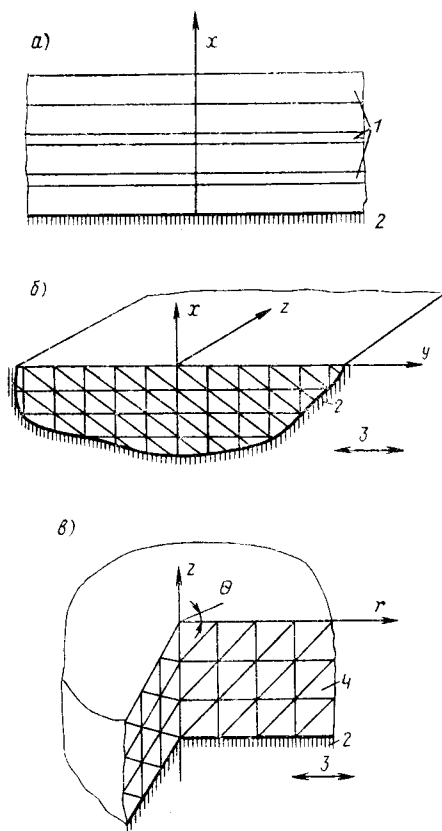


Рис. 17.17. Математическое моделирование массива основания (а — одномерная модель системы основания; б — плоская модель системы основания при применении МКЭ; в — осесимметричная модель системы основания при применении МКЭ)

1 — горизонтальные слои грунта; 2 — жесткое скальное основание; 3 — сейсмические движения; 4 — грунт с осесимметричным распределением характеристик (относительно вертикальной оси z)

мы $H(\bar{\omega})$ и обратного преобразования Фурье;

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\bar{\omega}) X(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega}, \quad (17.69a)$$

где $X(\bar{\omega})$ — преобразование Фурье для возмущающей функции $x(t)$, равное:

$$X(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i\bar{\omega}t) dt. \quad (17.69b)$$

В рассматриваемом случае возмущающая функция представляет собой временной процесс ускорения коренной породы, который обозначен $\ddot{v}_b(t)$. Преобразование Фурье для него имеет вид

$$B(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{v}_b(t) \exp(-i\bar{\omega}t) dt. \quad (17.70)$$

Искомый параметр реакции — ускорение на поверхности слоя грунта $\ddot{v}(t)$ и комплексная частотная характеристика — передаточная функция, выражающая амплитуды гармонических колебаний поверхности грунта при гармоническом входе в виде ускорения коренной породы. Обозначим эту передаточную функцию $Q(\bar{\omega})$. При свойствах слоя грунта, не вызывающих связей параметров затухания, расчет удобно выполнить с помощью принципа суперпозиции форм колебаний.

Итак, если дискретные степени свободы v_c грунтового массива выражены через собственные векторы свободных колебаний Φ , то

$$v_c = \Phi Y \quad (17.71)$$

и уравнения колебаний идеализированного грунта можно преобразовать в систему несвязанных уравнений типа

$$\ddot{Y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = -\mathcal{L}_n \ddot{v}_b, \quad (17.72)$$

в котором Y_n — амплитуда параметра реакции по n -й форме и каждый вектор Φ_n нормирован из условия образования единичной обобщенной массы $M_n = \Phi_n^T m \Phi_n = 1$. Модальный коэффициент сейсмического воздействия равен:

$$\mathcal{L}_n = \Phi_n^T m r. \quad (17.52)$$

Комплексная функция параметров перемещения реакции для этой нормальной координаты равна $-\mathcal{L}_n H_n(\bar{\omega})$, где из уравнения (4.11)

$$H_n(\bar{\omega}) = \frac{1}{\omega_n^2} \frac{1}{1 - \beta_n^2 + 2i\xi_n \beta_n}, \quad (17.73)$$

откуда функция ускорений равна $\mathcal{L}_n H_n(\bar{\omega}) \bar{\omega}^2$. Поэтому модальная передаточная функция, характеризующая ускорение на поверх-

ности по n -й форме колебаний при единичном ускорении основания, равна

$$Q_n(\bar{\omega}) = \Phi_{gn} \mathcal{L}_n H_n(\bar{\omega}) \bar{\omega}^2, \quad (17.74)$$

где Φ_{gn} — перемещение поверхности при n -й форме.

Тогда полная передаточная функция получается суперпозицией модальных передаточных функций, т. е.

$$Q(\bar{\omega}) = \sum_{n=1}^N Q_n(\bar{\omega}), \quad (17.75)$$

и по аналогии с (17.69) относительное ускорение \ddot{v}_g поверхности грунта

$$\ddot{v}_g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\bar{\omega}) B(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega}. \quad (17.76)$$

Однако для анализа колебаний свободной поверхности грунта необходимо знать полное ускорение поверхностного слоя, которое включает в себя относительное ускорение и псевдостатическую составляющую

$$\ddot{v}_g(t) = \ddot{v}_g(t) + r_g \ddot{v}_b(t). \quad (17.77)$$

В этом выражении r_g — перемещение на поверхности при статическом перемещении коренной породы. Окончательно для полного ускорения поверхностного слоя имеем:

$$\ddot{v}_g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [Q(\bar{\omega}) + r_g] B(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega}. \quad (17.78)$$

Выражение (17.78) представляет собой результат определения параметров колебаний свободной поверхности грунта при заданном колебании коренной породы $\ddot{v}_b(t)$. В соответствии со свойствами парных преобразований Фурье частотные характеристики можно представить в виде интеграла, зависящего от времени

$$[Q(\bar{\omega}) + r_g] B(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{v}_g(t) \exp(-i\bar{\omega}t) dt \equiv G(\bar{\omega}), \quad (17.79)$$

в котором преобразование Фурье для процесса ускорения поверхностного слоя обозначено $G(\bar{\omega})$.

Преобразуя (17.79), получим:

$$B(\bar{\omega}) = [Q(\bar{\omega}) + r_g]^{-1} G(\bar{\omega}). \quad (17.80)$$

И, окончательно, обратное преобразование от $B(\bar{\omega})$ [см. его определение по уравнению (17.70)] приводит к выражению

$$\ddot{v}_b(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [Q(\bar{\omega}) + r_g]^{-1} G(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega}, \quad (17.81)$$

которое характеризует движение коренной породы в функции от преобразования Фурье для колебаний свободной поверхности.

Уравнения (17.81) и (17.78) полностью определяют влияние любой системы грунта на характеристики сейсмических колебаний, проходящих через него, и выражают процесс изменения ускорений движения поверхностного слоя через ускорения коренной породы, и наоборот. Хотя в рассмотренной задаче учитывалось по одной компоненте входа и выхода, очевидно, что методы анализа можно легко распространить на системы с многими входами и выходами. В этом случае $[Q(\omega) + r_g]$ становится квадратной матрицей размером, равным числу входов и выходов системы. Определение передаточной функции $Q(\omega)$ легко осуществляется с позиций теории распространения волн, если слой грунта можно представить в виде одномерной модели. При этом отпадает необходимость применять метод суперпозиции форм колебаний. Соотношения вход-выход для грунта, состоящего из нескольких слоев с различными характеристиками, могут быть выражены непосредственно. В заключение необходимо снова подчеркнуть, что численное определение интегралов в уравнениях (17.78) и (17.81) следует выполнять в дискретной форме с использованием быстрого преобразования Фурье.

17.5.3. Взаимодействие сооружения с грунтом.

Вывод уравнений движения

Дискретная модель грунта. Ранее уже отмечалось, что помимо влияния, которое слой грунта может оказывать на характеристики колебаний свободной поверхности, грунт может также взаимодействовать со зданием или каким-либо другим сооружением, опирающимся на него, вызывая важные изменения в реакции конструкции. Для анализа проблемы взаимодействия сооружения с грунтом уравнения движения системы можно получить, рассматривая систему на рис. 17.18. Предположим, как показано на рисунке, что грунт и сооружение представлены дискретными моделями, причем степени свободы массы грунта обозначены v_a , степени свободы по контакту здания и сооружения — v_g , степени свободы только для здания — v^t , а перемещения скального основания — v_b . В данном анализе не будет накладываться никаких ограничений на число степеней свободы,

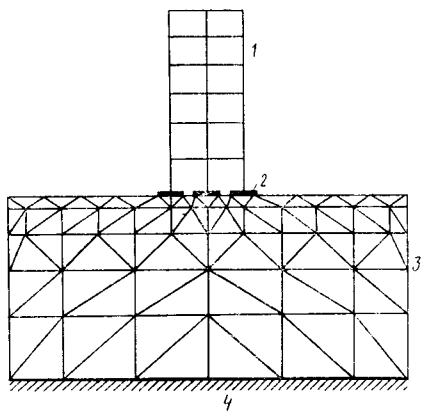


Рис. 17.18. Определение числа степеней свободы характерной системы грунт—сооружение

1 — присоединенная конструкция здания (степень свободы v^t); 2 — контактная зона (степень свободы v_g , общая для грунта и сооружения); 3 — грунт (степень свободы v_a); 4 — входное воздействие скального основания (степень свободы v)

на число степеней свободы,

связанных с каждым узлом основания или надземной части конструкции. Они включают поступательные и вращательные колебания по трем направлениям, а также степени свободы при деформировании по высшим формам колебаний.

С учетом конфигурации системы (рис. 17.18) уравнения колебаний связанной системы могут быть непосредственно записаны в форме (17.64). Это будет самым эффективным подходом, если известны процессы колебаний коренной породы и величина эффективной сейсмической нагрузки может быть подставлена в правую часть уравнения. Однако в большинстве случаев известны только параметры движения свободной поверхности грунта и целесообразнее через них выразить также эффективные сейсмические нагрузки. С этой целью по аналогии с (17.64) уравнения движения слоя грунта представим в виде

$$\tilde{m}_c \ddot{v}_c + \tilde{c}_c \dot{v}_c + \tilde{k}_c v_c = -\tilde{m}_b \ddot{v}_b - \tilde{c}_b \dot{v}_b - \tilde{k}_b v_b, \quad (17.82)$$

где \tilde{m}_c , \tilde{c}_c , \tilde{k}_c — характеристики грунта основания; \tilde{v}_c — параметры колебаний свободной поверхности; v_b — входное сейсмическое воздействие в уровне скального основания; \tilde{m}_b , \tilde{c}_b , \tilde{k}_b — параметры связанной системы, определяющие эффективные сейсмические нагрузки на основание здания при возмущении в уровне скального грунта.

Когда на грунте располагается здание, реакция системы изменяется, хотя эффективные сейсмические нагрузки остаются теми же. Уравнения движения связанной системы получают путем добавления соответствующих членов в левую часть уравнения (17.82)

$$[\tilde{m}_c + m_c] \{\ddot{v}_c + \dot{v}_c^t\} + [\tilde{c}_c + c_c] \{\dot{v}_c + \dot{v}_c^t\} + [\tilde{k}_c + k_c] \{v_c + v_c^t\} = -\tilde{m}_b \ddot{v}_b - \tilde{c}_b \dot{v}_b - \tilde{k}_b v_b,$$

где m_c , c_c , k_c — характеристики присоединенного здания; v_c^t — дополнительные члены к параметрам реакции вследствие размещения здания на строительной площадке¹.

Хотя в такой форме уравнения полностью характеризуют взаимодействие в системе грунт—сооружение, она не очень часто используется для анализа реакции, поскольку эффективные нагрузки на входе выражены через параметры колебаний скального основания. Поэтому эквивалентные нагрузки на свободной поверхности грунта в левой части уравнения (17.82) заменяют силы, выраженные через параметры движения коренных пород

$$[\tilde{m}_c + m_c] \{\ddot{v}_c + \dot{v}_c^t\} + [\tilde{c}_c + c_c] \{\dot{v}_c + \dot{v}_c^t\} + [\tilde{k}_c + k_c] \{v_c + v_c^t\} = +\tilde{m}_c \ddot{v}_c + \tilde{c}_c \dot{v}_c + \tilde{k}_c v_c. \quad (17.83)$$

Это уравнение характеризует общие колебания связанной системы грунт—сооружение с учетом вектора влияния эффективных сей-

¹ Заметим, что фигурные скобки используются для обозначения векторов, а квадратные скобки — для обозначения матриц.

смических нагрузок от основания на параметры движения свободной поверхности. Оно может использоваться как один из подходов к динамическому анализу реакции, однако во многих случаях более удобно записывать уравнения движения только в *дополнительных* параметрах реакции \dot{v}_c^t . Эта модификация включает перенос из левой части уравнения (17.83) в правую часть компонент колебания свободной поверхности грунта, что приводит к уравнению

$$[\tilde{m}_c + m_c] \ddot{v}_c^t + [\tilde{c}_c + c_c] \dot{v}_c^t + [\tilde{k}_c + k_c] v_c^t = -m_c \ddot{v}_c - c_c \dot{v}_c - k_c v_c. \quad (17.84)$$

Оно характеризует *дополнительное* движение *связанной* системы грунт—сооружение от эффективных сейсмических нагрузок, вызываемых только действием присоединенного сооружения на параметры колебания свободной поверхности грунта.

Далее это выражение для эффективной сейсмической нагрузки может быть упрощено с учетом положения о том, что оно характеризует влияние колебания свободной поверхности только на присоединенное сооружение. С этой целью векторы дополнительных перемещений и перемещений свободной поверхности разделяются:

$$v_c^t = \begin{bmatrix} v^t \\ v_g^t \\ v_a^t \end{bmatrix}; \quad \tilde{v}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{v}_g \\ \tilde{v}_a \end{bmatrix}, \quad (17.85)$$

где три строчки параметров относятся соответственно к степеням свободы конструкций здания, в контактной зоне здания и грунта основания и в промежуточных слоях грунта основания, как показано на рис. 17.18. Безусловно, при наличии сооружения не определяются параметры движения свободной поверхности грунта. Все матрицы, характеризующие физические свойства материалов, разделяются соответственно матрицам масс здания и основания:

$$m_c = \begin{bmatrix} m & m_g & 0 \\ m_g^T & m_{gg} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{m}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{m}_{g\tilde{g}} & \tilde{m}_{g\tilde{a}} \\ 0 & \tilde{m}_{a\tilde{g}} & \tilde{m}_{a\tilde{a}} \end{bmatrix}. \quad (17.86)$$

Аналогичные выражения могут быть выписаны для матриц затухания и жесткостей. Отсюда понятно, что эффективные нагрузки в соответствии с (17.84) определяются центральным столбцом разделенной матрицы физических характеристик присоединенной системы, которые влияют только на колебания свободной поверхности по степеням свободы *по контакту* здания и грунта основания. С учетом этого упрощения уравнение (17.84) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & [\tilde{m}_c + m_c] \ddot{v}_c^t + [\tilde{c}_c + c_c] \dot{v}_c^t + [\tilde{k}_c + k_c] v_c^t = \\ & = - \begin{bmatrix} m_g \\ m_{gg} \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{v}_g - \begin{bmatrix} c_g \\ c_{gg} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{v}_g - \begin{bmatrix} k_g \\ k_{gg} \\ 0 \end{bmatrix} v_g. \end{aligned} \quad (17.87)$$

Теперь эти уравнения движения можно записать в еще более простой форме, заменяя параметры v_c^t суммой динамической v_c и псевдостатической v_c^s составляющих и следуя ранее рассмотренной общей методике анализа системы без учета взаимодействия с грунтом. Как и раньше, псевдостатические перемещения можно определить из условия статического равновесия, которое сохраняет свою справедливость, если в уравнении движения опустить динамические члены. Тогда уравнение статике из (17.87) принимает вид

$$[\tilde{k}_c + k_c] v_c^s = - \begin{bmatrix} k_g \\ k_{gg} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{v}_g,$$

и после его решения получаем псевдостатическое перемещение

$$v_c^s = r_c \tilde{v}_g, \quad (17.88)$$

где

$$r_c = -[\tilde{k}_c + k_c]^{-1} \begin{bmatrix} k_g \\ k_{gg} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (17.89)$$

Полученная матрица коэффициентов влияния определяет псевдостатические перемещения, соответствующие единичным перемещениям свободной поверхности грунта для степеней свободы по контакту. Физический смысл этой матрицы можно пояснить, рассматривая каждый вектор r_c как перемещения, развиваемые в связанной системе при действии вектора статических эффективных нагрузок в узлах контакта. Каждый вектор статических эффективных нагрузок выбран так, что, действуя только на основание, он вызывает единичное перемещение определенного узла по контакту в то время, как перемещения других узлов стеснены. Векторы сил, приводящих к исследуемым перемещениям, можно легко определить методами статического анализа системы. Для анализа динамической реакции они, по существу, не нужны, так как необходимая матрица влияния полностью определяется уравнением (17.89).

Если координаты вдоль степеней свободы представить в виде

$$v_c^t = v_c + r_c \tilde{v}_g, \quad (17.90)$$

то уравнение (17.87) упрощается:

$$[\tilde{m}_c + m_c] \ddot{v}_c + [c_c + c_c] \dot{v}_c + [k_c + k_c] v_c = - \left\{ [m_c + m_c] r_c + \begin{bmatrix} m_g \\ m_{gg} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \ddot{v}_g. \quad (17.91)$$

Это выражение можно рассматривать как общее уравнение колебаний с учетом взаимодействия сооружений с грунтом. Слагаемое, зависящее от жесткости, выделено из вектора эффективных нагрузок.

зок в правой части уравнения в связи с тем, что псевдостатические перемещения определены в виде

$$[\tilde{k}_c + k_c] r_c + \begin{bmatrix} k_g \\ k_{gg} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (17.92)$$

как результат подстановки зависимости (17.89). Член, зависящий от затухания, в (17.91) также исключен, так как силы затухания предполагаются пренебрежимо малыми в связи с пропорциональностью матрицы затуханий матрице жесткостей [что соответствует для сил затухания эквивалентности условию (17.92) для жесткостей] или в связи с малостью самих коэффициентов затухания.

Следует отметить, что уравнения взаимодействия (17.91) можно преобразовать непосредственно в ранее полученные уравнения для систем с заданным возбуждением опор. Необходимо только, чтобы физические характеристики по контакту с присоединенным зданием были малы по сравнению с параметрами системы основания, т. е.

$$m_{gg} \ll m_{gg}, \quad c_{gg} \ll c_{gg}, \quad k_{gg} \ll k_{gg}.$$

В этом случае уравнения, характеризующие степени свободы основания в (17.87), указывают на равенство нулю *дополнительных* движений (т. е. взаимодействие отсутствует), а уравнения для верхнего строения приводятся к условию (17.64).

Модель упругого полупространства. Существенная особенность дискретной модели слоя грунта основания — необходимость четкого определения границ моделей. Поэтому при моделировании возникает очень важный вопрос: какого размера зону основания следует включать в анализ. Если существуют естественные физические границы, например, твердая скала, подстилающая поверхностные наносные слои, то размеры необходимой модели очевидны и можно считать, что условия по границе грунтов хорошо моделируют исходную систему. С другой стороны, если сооружение опирается на протяженный, большой мощности и однородный слой грунта, границы математической модели должны быть отодвинуты от сооружения. Тогда отражение от фактических границ модели не приводит к искажению реакции сооружения. На самом деле границы модели стремятся сохранить энергию колебаний внутри системы. Если предположить их большую удаленность от сооружения, то будет наблюдаться рассеивание энергии от сооружения¹. В этих условиях потребуются рассмотрение большого числа степеней свободы для моделирования работы системы грунта. Часто число степеней свободы для основания существенно превышает число степеней свободы для сооружения, но это — отдельная задача для исследований. Поэтому общая эффективность рассматриваемой модели может быть очень низкой.

¹ Для некоторых простых систем принимают так называемые спокойные граничные условия, которые приводят к поглощению энергии колебаний и моделируют большее излучение энергии. Рассмотрение этих методов выходит за рамки настоящей книги.

Когда массив основания достаточно однороден на большой площади и по глубине, а поверхность контакта между сооружением и грунтом может рассматриваться как жесткая плита, это ограничение дискретной модели можно обойти, рассматривая грунт как упругое полупространство. Слой грунта основания воспринимает нагрузку, приложенные к нему от фундамента здания. Во время землетрясения жесткая плита фундамента может испытывать перемещения по шести степеням свободы и несущая способность грунта определяется шестью компонентами силового воздействия, как показано на рис. 17.19. Отсюда работа упругого полупространства полностью определяется системой соотношений восстанавливающая сила — перемещение для каждой степени свободы.

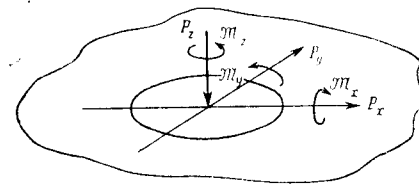


Рис. 17.19. Силы, приложенные к упругому полупространству массива основания

Для моделирования статической работы системы грунт — сооружение слой грунта основания может моделироваться шестью упругими пружинами по шести степеням свободы жесткого фундамента. Соответствующие упругие константы можно определить для упругого полупространства методами механики сплошной среды. Вместе с тем динамическое сопротивление грунта при сейсмическом воздействии определяется не только статической жесткостью пружин, но и инерционными, и диссипативными силами. Приемлемое соотношение динамическая нагрузка — перемещение для упругого полупространства при гармоническом возбуждении жесткого основания также можно определить методами механики сплошной среды. Результаты анализа показывают, что относительные амплитуда и фазовый угол восстанавливающих сил являются функциями частоты внешнего воздействия. Следовательно, динамическая работа полупространства должна моделироваться вдоль каждой из степеней свободы системой пружина — конденсатор с частотно-зависимыми характеристиками.

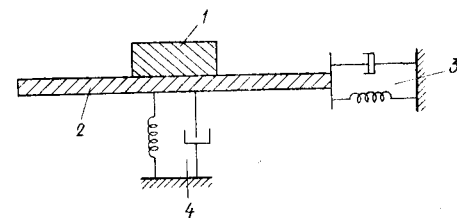


Рис. 17.20. Модель упругого полупространства основания с сосредоточенными параметрами (поступательные колебания в вертикальной плоскости)

1 — присоединенная масса; 2 — жесткий диск основания; 3 — горизонтальная пружина с демпфером; 4 — вертикальная пружина с демпфером

В принципе такая частотно-зависимая модель основания может быть непосредственно использована при частотном анализе задачи взаимодействия сооружения с грунтом. Однако анализ усложнен-

ной модели грунт—сооружение с большим числом степеней свободы может быть существенно упрощен, если характеристику основания рассматривать как частотно независимую. Более того, если анализ распространяется на неупругую стадию работы, частотный анализ становится неприменимым. Поэтому рациональнее представить упругое полупространство слоя грунта основания частотно-независимыми компонентами, а их характеристики выбрать с учетом как можно лучшего отражения действительного частотно-зависимого процесса реагирования.

Когда фундаментная плита поддерживает механическую систему, работающую при сравнительно высоких частотах, инерционное сопротивление грунта мало и полупространство можно моделировать простой пружиной с затуханием вдоль каждой из степеней свободы. Постоянные пружины могут быть выбраны из условия описания статических перемещений, а коэффициенты затухания — в соответствии с условиями наилучшего воспроизведения теоретических значений амплитуды и фазы нагрузок в основании.

При моделировании сейсмической реакции системы основания, когда наиболее существенные частоты только в несколько раз превышают частоту основного тона колебаний системы грунт—сооружение, наилучшие результаты могут быть получены при введении в качестве дополнительного параметра модели виртуальной массы грунта. Тогда модель для каждой степени свободы включает следующие параметры: упругую постоянную пружины, определяемую как зависимость статическая сила—перемещение; виртуальную массу и коэффициент демпфирования, получаемый определенным образом из рассмотрения безынерционной модели (модель с сосредоточенным параметром при вертикальном воздействии показана на рис. 17.20). Путем правильного выбора этих динамических характеристик реакция модели основания с одним сосредоточенным параметром может с точностью до нескольких процентов соответствовать теоретическому анализу работы полупространства во всем интересующем диапазоне частот.

Анализ методами механики сплошной среды частотно-зависимых сил, действующих между жесткой плитой фундамента и поверхностью упругого полупространства слоя грунта основания, был выполнен для круглой и прямоугольной плит. Он основывался на допущении, что распределение динамических напряжений на плиту аналогично распределению при статических нагрузках. Величины частотно-независимых постоянных, рекомендуемые для приближенного описания теоретических результатов анализа сейсмической реакции, приведены в табл. 17.1. Эти значения могут быть использованы при составлении уравнений колебания системы грунт—сооружение в форме (17.91). При этом слой грунта основания представляется диагональными матрицами \tilde{m}_c , \tilde{c}_c и \tilde{k}_c , определяемыми для степеней свободы \tilde{v}_g по контактной поверхности, в которых диагональные члены принимаются как коэффициенты сосредоточенных параметров по табл. 17.1. Конечно, коэф-

фициенты виртуальных масс для модели грунта, входящие в \tilde{m}_c , влияют как на эффективные сейсмические нагрузки в правой части уравнения (17.91), так и на инерционные члены в левой части уравнения. Следует подчеркнуть, что все степени свободы рассматриваемой модели грунта относятся к контактной поверхности и внутренние степени свободы \tilde{v}_a не рассматриваются.

Таблица 17.1. Эквивалентные дискретные характеристики упругого полупространства, на котором покоится круглая жесткая плита

Степень свободы	Постоянные пружины ¹	Вязкое затухание	Присоединенная масса
Вертикальная	$K \equiv \frac{4 Gr}{1 - \nu}$	$1,79 \sqrt{K \rho r^3}$	$1,50 \rho r^3$
Горизонтальная	$18,2 Gr \frac{1 - \nu^2}{(2 - \nu)^2}$	$1,08 \sqrt{K \rho r^3}$	$0,28 \rho r^3$
Качение ²	$2,7 Gr^3 [\nu = 0]$	$0,47 \sqrt{K \rho r^5}$	$0,49 \rho r^5$
Кручение ²	$5,3 Gr^3$	$1,11 \sqrt{K \rho r^5}$	$0,70 \rho r^5$

¹ Относятся к степеням свободы в форме кручения.

² r —радиус плиты, G —модуль жесткости, ν —коэффициент Пуассона, ρ —плотность (из кн. Н. Ньюмарка и Э. Розенблюета, с. 98).

17.5.4. Взаимодействие сооружения с грунтом. Анализ сейсмической реакции

Сейсмическая реакция любой системы грунт—сооружение может быть определена методами численного интегрирования общих уравнений движения (17.91). Однако математические модели таких систем обычно включают большое число степеней свободы, и расчет может оказаться сложным и дорогостоящим, если его выполнять непосредственно в этих координатах. Как отмечалось, в большинстве случаев перед анализом сейсмической реакции желательно преобразовать уравнения колебаний к нормальным координатам, так как землетрясение вызывает колебания только по сравнительно небольшому числу форм. Следует отметить, что ни одна аппроксимация не включает нормальных координат. Если все N координаты учитываются при расчете, то расчетные параметры реакции будут одинаковы независимо от того, в нормальных или первоначальных координатах рассматриваются колебания дискретной системы. Между тем нормальные (главные) координаты значительно эффективнее при описании форм деформирования сооружения, и, как правило, очень хорошее приближение параметров реакции достигается при

учете только нескольких первых форм колебаний. При этом результаты получаются приближенными в том смысле, что учитываются наиболее существенные по вкладу формы колебаний, но число их ограничивается.

Соотношения между координатами дискретной системы v_c и главными координатами Y имеют вид

$$v_c = \Phi Y, \quad (17.71)$$

где Φ — наиболее важные векторы собственных незатухающих колебаний системы грунт—сооружение. В общем случае только очень ограниченное число p форм колебаний будет определять параметры сейсмической реакции, т. е. $p \ll N$, и поэтому Φ — прямоугольная матрица с числом строк, значительно большим, чем число столбцов.

Если теперь подставить соотношение (17.71) в (17.91) и обе части умножить слева на Φ^T , то получим систему уравнений движения в нормальных координатах

$$\ddot{Y} + c\dot{Y} + \Omega^2 Y = L\ddot{v}_g, \quad (17.93)$$

где L — матрица коэффициентов сейсмического воздействия для каждой формы колебаний и каждой компоненты воздействия \ddot{v}_g на свободной поверхности

$$L = -\Phi^T \left\{ [\tilde{m}_c + m_c] r_c + \begin{bmatrix} m_g \\ m_{gg} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (17.94)$$

В уравнении (17.93) для удобства принято, что параметры форм колебаний нормированы так, чтобы обобщенная масса для каждой формы равнялась единице, т. е.

$$\Phi_n^T [\tilde{m}_c + m_c] \Phi_n = 1.$$

Соответственно обобщенная жесткость для каждой формы представляет собой квадраты частот, а их матрица диагональная:

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \omega_p^2 \end{bmatrix}. \quad (17.95)$$

Матрица обобщенных сил затухания в (17.93) определяется соотношением

$$c = \Phi^T [\tilde{c}_c + c_c] \Phi, \quad (17.96)$$

и, если матрица затухания для связанной системы грунт—сооружение такова, что она ортогональна формам колебаний, то соотношение (17.96) принимает вид

$$c = \begin{bmatrix} 2\xi_1 \omega_1 & & & \\ & 2\xi_2 \omega_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & 2\xi_p \omega_p \end{bmatrix}. \quad (17.97)$$

В этом случае (17.93) становится системой несвязанных уравнений колебаний по разным формам, которые могут быть решены независимо, а реакция системы определена с использованием принципа суперпозиции. Процессы изменения во времени перемещений и нагрузок для этого класса сооружений устанавливаются так же, как и для систем, не взаимодействующих с грунтом [см. уравнения (17.34) и (17.38)]. Максимальные значения параметров реакции такой системы грунт—сооружение без взаимной связи форм колебаний могут быть также определены спектральными методами [см. (17.47) и (17.48)].

Однако при решении большинства задач о взаимодействии сооружения с грунтом нерационально предположение о том, что матрица затухания удовлетворяет условию ортогональности. Как правило, затухание в слое грунта основания значительно выше, чем в сооружении, и силы затухания будут приводить к взаимной связи между формами недемпфированных колебаний. Связь параметров затухания особенно существенна в системах, в которых слой грунта основания представляется моделью упругого полупространства, так как для моделирования потерь излучаемой энергии необходимо введение очень больших вязких демпферов. Для таких систем матрица обобщенных коэффициентов затухания в (17.96) недиагональна. Она имеет наддиагональные члены, которые характеризуют связь между формами колебаний в уравнении (17.93), поэтому принцип суперпозиции неприменим. Тем не менее преобразование к главным координатам все же приводит к значительным преимуществам при анализе реакции, поскольку существенно динамическое поведение систем со связанными параметрами затухания может быть описано с помощью ограниченного числа форм собственных незатухающих колебаний. Как отмечалось, единственная приближенность анализа с использованием нормальных координат заключается в отсечении высших форм колебаний, а эти высшие формы не более существенны для систем со связанным затуханием, чем для систем без связи указанных параметров.

Очевидно, что в (17.96) следует вносить упрощенные матрицы коэффициентов затухания для слоя грунта основания c_c и сооружения c_c до того, как составляется матрица обобщенных коэффициентов затухания для уравнения (17.93). В большинстве случаев этого можно достичь, назначая коэффициенты затухания по разным формам отдельно для здания и слоя грунта основания. Далее полученные матрицы затухания следует ввести в каждую из этих подсистем, используя методы анализа, рассмотренные в гл. 12. Очень часто для здания вводится простая матрица коэффициентов затухания, пропорциональных массам или жесткостям, а основание рассматривается как упругое полупространство, для которого коэффициенты затухания принимаются по табл. 17.1. Если с помощью (17.96) составлена матрица связанных обобщенных коэффициентов затухания, то параметры реакции $Y(t)$ в нормальных координатах при любом внешнем сейсмическом воздействии вычисляются мето-

дами шагового интегрирования связанной системы уравнений (17.93). Тогда перемещения и силы определяются в исходной системе координат соотношениями, эквивалентными (17.35) и (17.38):

$$\dot{v}(t) = \Phi Y(t); \quad (17.98)$$

$$f_S(t) = m\Phi\Omega^2 Y(t). \quad (17.99)$$

Эти выражения и представляют собой реакцию связанной системы грунт—сооружение. Погрешность от учета ограниченного числа форм колебаний может быть оценена на практике сопоставлением результатов расчета для разного числа форм колебаний. Необходимо помнить, что методы спектрального анализа не могут быть применены для расчета систем со связанными параметрами затухания, так как спектр реакции определен для независимых главных координат и не может учитывать взаимодействия между ними.

17.6. АНАЛИЗ СЕЙСМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ НЕУПРУГОЙ СИСТЕМЫ

17.6.1. Задачи нелинейного анализа. В рассмотренных ранее разделах, посвященных анализу сейсмической реакции, предполагалось, что сооружение представляет собой упругую систему и что его характеристики не изменяются во время землетрясения. Однако, как отмечалось в гл. 16, при рассмотрении общих критериев расчета на сейсмические воздействия в класс расчетных нагрузок необходимо включать интенсивные землетрясения. Следует ожидать, что такие сейсмические колебания грунта вызовут существенные повреждения строительных конструкций. Очевидно, что критерий расчета должен охватывать сейсмическую реакцию неупругой системы, поскольку в результате существенных повреждений жесткость сооружений должна меняться.

Более того, можно легко показать, что землетрясение даже средней интенсивности вызывает существенные перенапряжения в конструкциях здания, рассчитанных в соответствии с обычными требованиями сейсмических норм. Например, как подчеркивалось в разд. 17.2, сравнение методов динамического анализа реакции с расчетными рекомендациями Единого строительного кода (УВС) показывает, что коэффициент сейсмической нагрузки в основании по коду эквивалентен спектру сейсмических ускорений. На рис. 17.21 приведены значения коэффициента сейсмической нагрузки в основании здания по УВС и спектры реакции для трех землетрясений. Для удобства сопоставления спектры реакций для двух землетрясений уменьшены в четыре раза. Из рис. 17.21 видно, что даже умеренное землетрясение вызывает сейсмические нагрузки, которые в несколько раз больше нормативных. Поэтому в здании, запроектированном согласно требованиям норм США, следует ожидать повреждений при землетрясениях средней силы.

Более подробное сравнение сейсмических нагрузок по нормам с параметрами реакции при землетрясении средней силы выполне-

но для 20-этажного здания, показанного на рис. 17.22. Напряжения и перемещения в здании при горизонтальных сейсмических нагрузках по УВС были определены с помощью программы статического расчета рам на ЭВМ. Затем метод суперпозиции форм колебаний был использован для вычисления реакции здания при воздействии, заданном акселерограммой землетрясения Эль-Сентро в мае 1940 г. (показанной на рис. 17.23) по программе динамического расчета. Перемещения этажей и изгибающие моменты в некоторых ригелях и колоннах, полученные с помощью двух методов, показаны на рис. 17.24. Результаты динамического анализа реакции представляют собой отгибающие параметры и по существу являются максимальными величинами, достигаемыми в любой момент времени, т. е., как правило, они проявляются одновременно. Результаты расчетов снова подтверждают, что землетря-

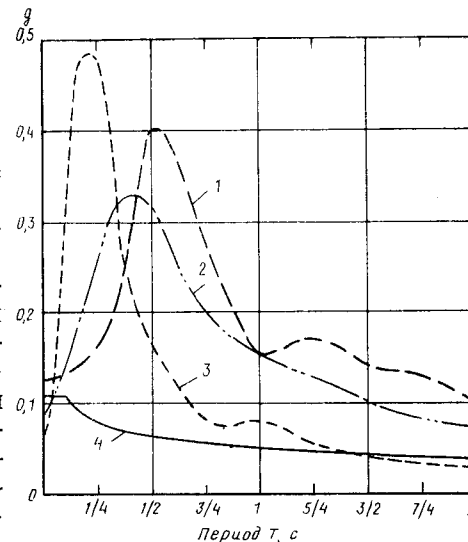
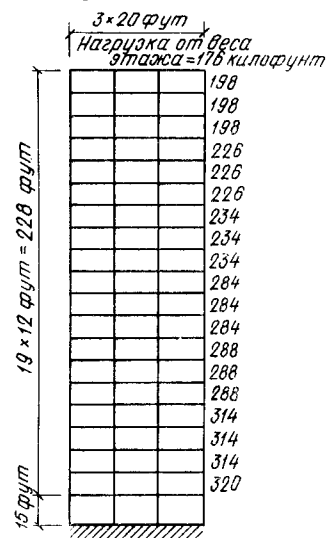


Рис. 17.21. Сравнение сейсмических коэффициентов по Единому строительному коду США со спектрами реакции (при $\xi=2\%$) реальных землетрясений
1 — Паркфилд $\times 0,25$; 2 — Эль-Сентро $\times 0,25$; 3 — Сан-Франциско, 1957; 4 — Единый строительный код



Относительная жесткость колонн и ригелей
(EJ): (EJ)₀

Колонны		Ригели
наружные	внутренние	
1	2	4
1,5	3	6
3	6	8
4,5	9	
6	12	10
10	20	
12	24	

Рис. 17.22. Размеры и характеристики здания

сение средней силы вызывает существенно большие напряжения и перемещения, чем нагрузки, принятые по нормам, и в рассматриваемом случае превышают их примерно в 4 раза. Безусловно, проведенное сравнение не может считаться совершенным, поскольку сооружение рассматривалось как динамическая линейно-упругая система. В действительности сооружения, рассчитанные по нормам, будут перенапряжены и параметры действительной реакции можно определить только с помощью нелинейного анализа.

17.6.2. Методика нелинейного анализа. Подробное описание численных методов анализа неупругих систем со многими степенями свободы дано в гл. 12. В общем случае такой анализ включает шаговое интегрирование уравнений движения с разделением параметров реакции на малые по времени приращения с допущением о постоянстве характеристик сооружения в пределах каждого такого

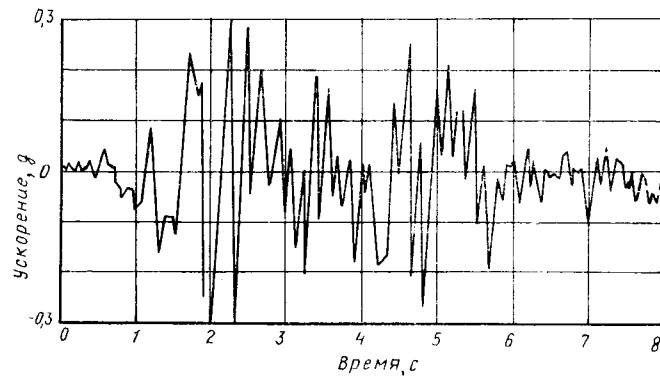


Рис. 17.23. Акселерограмма землетрясения Эль-Сентро, С-Ю, 18.05.1940

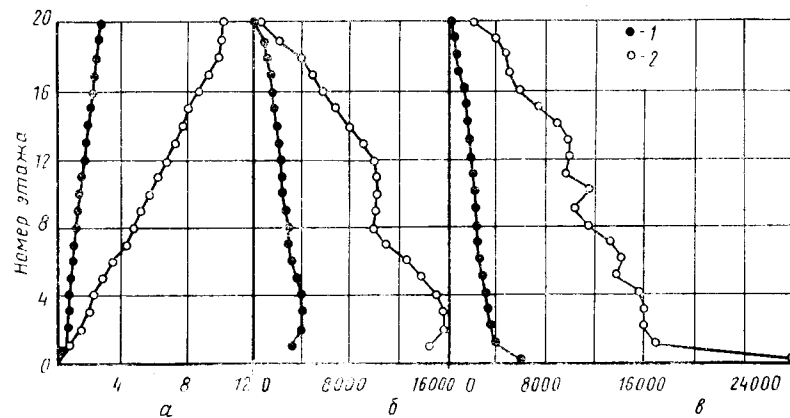


Рис. 17.24. Сравнение параметров упругой сейсмической реакции с требованиями кода

a — перемещение, дюймы [2,54 см]; *б* — моменты в ригелях, килофунты·дюймы [0,0115 тс·м]; *в* — моменты во внутренних колоннах, килофунты·дюймы [0,0115 тс·м]; 1 — код на сейсмические нагрузки; 2 — упругая реакция при воздействии Эль-Сентро, $\xi = 10\%$

интервала. В конце каждого интервала характеристики могут изменяться в соответствии со схемой деформирования сооружения в этот момент времени. Таким образом, при расчете неупругих систем по существу последовательно выполняют расчеты упругих систем постоянно изменяющегося сооружения.

Наиболее трудно при таком расчете определить жесткостные характеристики, которые должны быть предписаны сооружению в течение временного интервала по результатам деформированного состояния сооружения в конце предшествовавшего интервала. При нелинейном анализе здания (см. рис. 17.22) предполагалось, что пластические шарниры образуются в концевых сечениях колонн и ригелей, когда изгибающие моменты в этих сечениях достигают предела текучести, установленного для каждого элемента. При деформировании за пределами упругости жесткость элементов при повороте принималась равной 5% от начальной величины. При перемене направления деформирования жесткость восстанавливалась также до начального значения. Таким образом, для элемента принималась билинейная упруго-пластическая зависимость изгибающий момент — кривизна. Матрица жесткостей сооружения в целом составлялась для каждого интервала времени объединением жесткостей ригелей и колонн, причем для каждого элемента жесткость определялась билинейной зависимостью в соответствии с достигнутым деформированным состоянием. Приращение реакции вычислялось затем методом линейных ускорений, как описано в гл. 12, и новые деформации суммировались с параметрами, достигнутыми в конце предыдущего интервала времени.

17.6.3. Характерные особенности реакции неупругой системы. Последовательные этапы расчета были выполнены для здания, показанного на рис. 17.22, при действии землетрясения Эль-Сентро, разных значениях и распределениях параметров прочности отдельных элементов. Сначала была рассмотрена эталонная конструкция, при которой пластические моменты колонн в 6 раз превышали расчетные значения изгибающих моментов при действии горизонтальных статических нагрузок по коду, а пластические моменты ригелей были вдвое больше нормативных значений. Затухание принято равным 10% от критической величины.

Результаты нелинейного анализа такого сооружения сравнивались с расчетными данными рассмотренного ранее абсолютно упругого сооружения (см. рис. 17.25). Максимальные перемещения неупругой системы одного порядка с перемещениями упругой системы и лишь на несколько процентов превышают их. Однако деформации колонн и ригелей существенно меняются при учете неупругой работы. Эти данные выражены в виде коэффициентов податливости (DR) элементов, которые определяются как отношение максимальных углов поворота концевых сечений к углу поворота в момент начала текучести

$$DR = \frac{\theta_{\max}}{\theta_y} = \frac{\gamma_{\max} + \theta_y}{\theta_y} \quad (17.100)$$

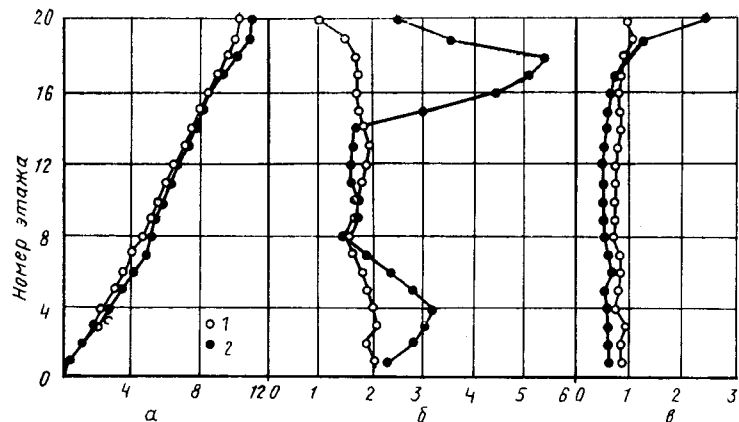


Рис. 17.25. Сравнение параметров сейсмической реакции упругой и неупругой системы

α — перемещение, дюймы; β — коэффициент податливости ригелей; γ — коэффициент податливости колонн; 1 — реакция упругой системы, $\xi_h=10\%$; 2 — реакция неупругой системы, $\xi_h=10\%$

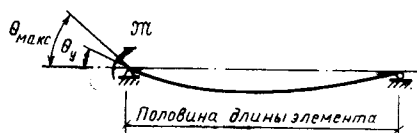


Рис. 17.26. Определение коэффициента податливости по углу поворота

Здесь обозначения приняты в соответствии с рис. 17.26.

Следует отметить, что значение коэффициента податливости меньше единицы характеризует состояние, при котором элемент не достигает состояния текучести. Результаты упругого анализа на рис. 17.25 также представлены в форме коэффициентов податливости. Коэффициенты податливости больше единицы не характеризуют состояние текучести.

Результаты расчетов на рис. 17.25 свидетельствуют о том, что в ригелях неупругой системы, особенно в нижних и верхних этажах, возникают значительные пластические деформации, а колонны остаются в пределах упругой работы, за исключением колонн верхних этажей. Такая картина считается характерной для здания, прочность элементов которого определена в соответствии с нормативными нагрузками. Появление текучести в конструкциях нижних этажей — это прямой результат высокой интенсивности входного сейсмического воздействия, а текучесть в конструкциях верхних этажей возникает вследствие отражения волн от верха здания. Конечно, такой анализ определяет требования в отношении податливости конструкций при землетрясении. Обязанность проектировщика — законструировать элементы и их сопряжения так, чтобы степень их податливости обеспечивала надежную работу конструкции при землетрясении.

Результаты расчетов на рис. 17.25 свидетельствуют о том, что в ригелях неупругой системы, особенно в нижних и верхних этажах, возникают значительные пластические деформации, а колонны остаются в пределах упругой работы, за исключением колонн верхних этажей. Такая картина считается характерной для здания, прочность элементов которого определена в соответствии с нормативными нагрузками. Появление текучести в конструкциях нижних этажей — это прямой результат высокой интенсивности входного сейсмического воздействия, а текучесть в конструкциях верхних этажей возникает вследствие отражения волн от верха здания. Конечно, такой анализ определяет требования в отношении податливости конструкций при землетрясении. Обязанность проектировщика — законструировать элементы и их сопряжения так, чтобы степень их податливости обеспечивала надежную работу конструкции при землетрясении.

17.6.4. Влияние изменчивости прочностных характеристик. Тот факт, что конструкции здания (рис. 17.25) пластически деформи-

руются почти полностью за счет неупругой работы ригелей в то время, как колонны остаются упругими, объясняется распределением относительных прочностей, к которому приводит расчет согласно требованиям норм США. На самом деле энергия, поглощаемая в процессе неупругого деформирования ригелей, защищает колонны от перенапряжения. Изменение относительной несущей способности ригелей и колонн может привести к изменению механизма и последовательности пластического деформирования элементов каркаса.

Результаты расчетов при различных прочностных характеристиках ригелей показаны на рис. 17.27*. Во всех рассмотренных случаях прочностные характеристики колонн были одинаковыми, а параметры прочности ригелей принимались в 1,5 и 4 раза больше расчетных значений при нормативных нагрузках, а также при стан-

* При выполненном анализе затуханием пренебрегали. Поэтому результаты расчета для эталонного здания немного отличаются от данных на рис. 17.25.

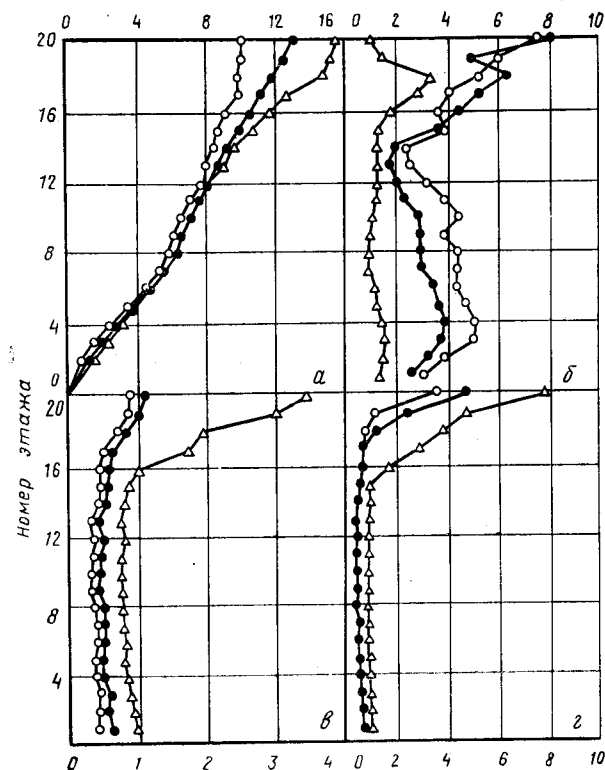


Рис. 17.27. Влияние прочности ригелей на параметры реакции неупругой системы

α — перемещение в дюймах; β, γ, δ — соответственно коэффициенты податливости ригелей, наружных колонн и внутренних колонн; (○, ●, △) — изменение параметра прочности ригелей соответственно в 1,5; 2; 4 раза)

дартном коэффициенте прочности, равном 2. Как следовало ожидать, коэффициенты податливости ригелей изменяются обратно пропорционально параметрам их прочности. Однако горизонтальные перемещения верхних этажей увеличиваются по мере роста прочности ригелей. Этот на первый взгляд удивительный результат объясняется текучестью колонн. Очевидно, что увеличение предельной несущей способности ригелей больше сказывается на колоннах верхних этажей, а повышенные деформации колонн непосредственно влияют на перемещения этажей.

Соотношение между пластическими деформациями ригелей и колонн можно также регулировать изменением параметров прочности колонн, о чем свидетельствуют данные на рис. 17.28. При этом параметры прочности ригелей приняты в соответствии с рис. 17.25, а параметры прочности колонн — в 2 и 10 раз больше расчетных значений при нормативных нагрузках, а также при стандартном

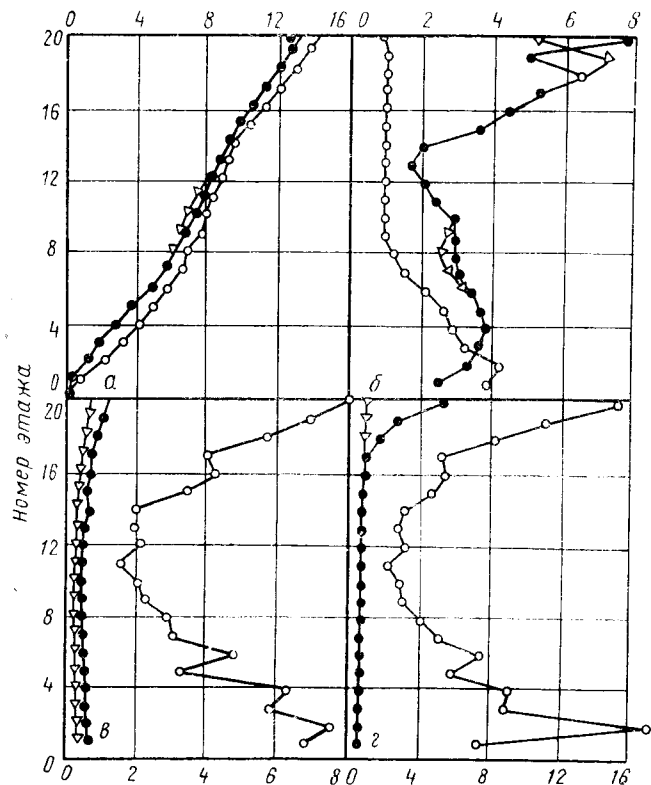


Рис. 17.28. Влияние прочности колонн на параметры реакции неупругой системы (см. рис. 17.25): а — перемещение, дюймы; б, в, г — соответственно коэффициенты податливости ригелей, наружных колонн и внутренних колонн; о, ●, △ — изменение параметра прочности колонн соответственно в 2, 6, 10 раз

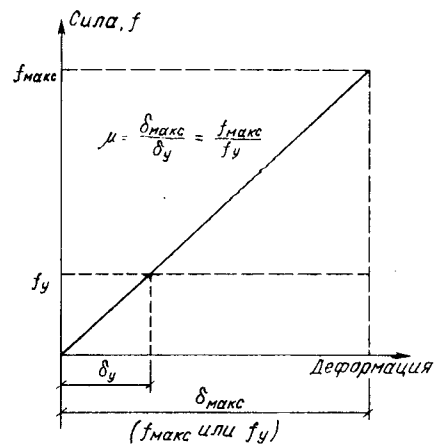
коэффициенте прочности, равном 6. На рис. 17.28 видно, что увеличение несущей способности колонн мало влияет на характер работы здания, что объясняется достаточно высокой несущей способностью колонн эталонного здания, при которой в них возникают только очень небольшие пластические деформации. С другой стороны, при применении колонн невысокой несущей способности в связи с их повышенной пластичностью снижаются параметры неупругих деформаций в ригелях. Получаемые при этом для отдельных элементов колонн коэффициенты податливости около 16 выдвигают перед проектировщиком большие трудности по обеспечению требуемой степени податливости.

Хотя цель рассмотренного анализа — не обсуждение сейсмостойкости сооружений, полученные данные позволяют сделать несколько выводов. Во-первых, необходимо обеспечивать разумное соотношение между параметрами прочности ригелей и колонн и следует рекомендовать конструктивные решения с достаточно слабыми ригелями и прочными колоннами. Это объясняется тем, что требования по обеспечению податливости ригелей более рациональны и эффективны, поскольку развитие местных пластических деформаций в ригелях не очень снижает несущую способность сооружения при вертикальных нагрузках. В то же время местные пластические деформации колонн могут привести к обрушению зданий. Во-вторых, в рамных каркасах следует избегать слабых зон и участков, так как именно здесь будет происходить повышенное рассеяние энергии, а остальная часть сооружения останется существенно недонапряженной. Наиболее рациональное конструктивное решение получается при разумном распределении параметров прочности, что приводит к равномерному распределению пластических деформаций и к предотвращению интенсивных локальных повреждений.

17.6.5. Метод коэффициентов податливости. Несмотря на принципиальную простоту использованной методики нелинейного анализа, он требует достаточно больших затрат машинного времени для определения параметров реакции даже сравнительно простых сооружений, так как матрица жесткостей должна составляться для каждого интервала времени процесса вычислений. Более того, выбор соответствующего сочетания параметров жесткости и прочности элементов определяется последовательными приближениями. Поэтому рациональность разных конструктивных решений должна быть проанализирована до получения окончательных результатов расчетов. Поэтому полный нелинейный анализ выполняется редко, за исключением окончательной проверки адекватности завершеного проекта.

Для получения рационального показателя неупругой работы сооружения при сейсмических воздействиях без выполнения самого процесса нелинейного анализа разработан метод коэффициентов податливости. Основной предпосылкой этого метода является допущение о том, что прогибы сооружения при заданном сейсмическом воздействии примерно равны при упругой и существенно не-

упругой работе. Это положение подтверждается рис. 17.25, из которого видно, что перемещения системы при неупругой работе практически совпадают с параметрами упругой системы, хотя для отдельных ригелей коэффициенты податливости достигают 5. Если принять условие равенства перемещений упругих и неупругих систем, то параметры реакции неупругой системы могут быть определены непосредственно через параметры реакции упругой системы. Рассмотрим, например, соотношение между нагрузкой и перемещением для элемента (рис. 17.29). Если максимальный прогиб элемента δ_{\max} не зависит от параметра прочности, то отношение максимальной деформации к предельной упругой равно отношению восстанавливающей силы в абсолютно упругой системе к величине максимальной силы в пределах упругости элемента, т. е.



$$\frac{\delta_{\max}}{\delta_y} = \frac{f_{\max}}{f_y}$$

Отношение δ_{\max}/δ_y называется коэффициентом податливости элемента μ :

$$\mu = \delta_{\max}/\delta_y$$

Отсюда расчетная прочность элемента может быть выражена через параметры реакции упругой системы и коэффициент податливости каждого элемента

$$f_y = f_{\max}/\mu$$

Рис. 17.29. Определение коэффициента податливости μ .

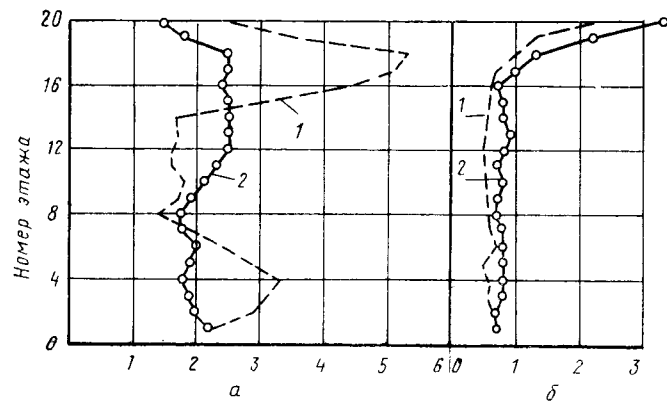


Рис. 17.30. Сравнение приближенных и точных значений коэффициентов податливости ригелей а и колонн б

1 — результаты анализа неупругой системы; 2 — по методу коэффициентов податливости

Таким образом, анализ сейсмической реакции неупругой системы может быть выполнен на основании расчета упругой системы и последующего назначения параметров прочности элементов с учетом вычисленных сил для упругой системы, которые делятся на коэффициент податливости, характеризующий приемлемую степень неупругих деформаций конструкций. С другой стороны, параметры реакции неупругой системы заданного конструктивного решения могут быть приближенно определены с помощью коэффициентов податливости элементов, вычисляемых как отношение максимальных упругих сил к известным величинам прочности элементов здания:

$$\mu = f_{\max}/f_y$$

Методика неупругого анализа может быть рассмотрена на примере результатов расчета эталонного здания как упругой системы (см. рис. 17.24). Ожидаемые коэффициенты податливости для некоторых колонн и ригелей определяются делением максимальных значений изгибающих моментов в упругой системе на моменты в этих элементах в пластической стадии. Выбор прочностных показателей элементов характеризует определенное конструктивное решение. Если предположить, что несущая способность ригелей и колонн соответственно в 2 и 6 раз больше расчетной несущей способности при изгибе, вычисленной в соответствии с требованиями норм, то приближенные величины коэффициентов податливости достигают значений, приведенных на рис. 17.30. Здесь же даны для сравнения точные значения коэффициентов податливости, полученные для здания на рис. 17.25. Сравнение этих значений указывает на их довольно хорошее соответствие, за исключением увеличения параметров деформирования ригелей в уровне нижних и верхних этажей здания. В целом полученное соответствие результатов значительно лучше, чем можно было ожидать от метода коэффициентов податливости. Ведь по существу этот метод исходит из предположения о равномерном распределении пластических деформаций по высоте сооружения, а любая локализация пластических деформаций не принимается во внимание. Такой подход позволяет назначать рациональную степень податливости регулярных систем. Он не охватывает сооружения с резко выраженным неравномерным распределением параметров прочности, например для зданий с первым гибким (каркасным) этажом, в пределах которого ограничивается развитие неупругих деформаций.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие	6
Обозначения	8
В в е д е н и е	11
В.1. Общие сведения о динамике сооружений	11
В.1.1. Основная цель динамического анализа сооружений	11
В.1.2. Виды хорошо определенных нагрузок	12
В.1.3. Основные характеристики задач динамики сооружений	13
В.1.4. Методы дискретизации	14
В.1.4.1. Метод сосредоточенных масс (14). — В.1.4.2. Обобщенные перемещения (15). — В.1.4.3. Метод конечного элемента (16)	
В.1.5. Вывод уравнений движения	18
В.1.5.1. Метод равновесия с использованием принципа Даламбера (18). — В.1.5.2. Принцип возможных перемещений (19). — В.1.5.3. Принцип Гамильтона (20)	

ЧАСТЬ I. СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Глава 1. Вывод уравнений движения	22
1.1. Компоненты основной динамической системы	22
1.2. Форма записи уравнений	22
1.2.1. Метод равновесия (22). — 1.2.2. Принцип возможных перемещений (23). — 1.2.3. Примененные принципа Гамильтона (23)	
1.3. Влияние вертикальных нагрузок	24
1.4. Влияние кинематических возмущений основания	25
1.5. Обобщенные системы с одной степенью свободы. Системы жестких тел	27
1.6. Обобщение системы с одной степенью свободы. Системы с распределенной упругостью	32
1.7. Выражения для обобщенных параметров систем	37
Глава 2. Реакция систем при свободных колебаниях	40
2.1. Решение уравнения колебаний	40
2.2. Свободные колебания без учета затухания	41
2.3. Свободные колебания с учетом затухания	42
2.3.1. Критическое затухание (43). — 2.3.2. Недодемпфированные системы (с затуханием ниже критического) (43). — 2.3.3. Передемпфированные системы (с затуханием больше критического) (47).	
Глава 3. Реакция при гармонических нагрузках	48
3.1. Недемпфированная система	48
3.1.1. Решение однородного уравнения (48). — 3.1.2. Частное решение (49). — 3.1.3. Общее решение (49). — 3.1.4. Относительный параметр реакции (51).	
3.2. Демпфированная система	51
3.3. Резонансный режим	55
3.4. Акселерометры и приборы для измерения перемещений	58
3.5. Виброизоляция	59
3.6. Определение затухания в системах с одной степенью свободы	64

3.6.1. Затухание свободных колебаний (64). — 3.6.2. Резонансный метод (65). — 3.6.3. Метод половинной энергии (метод ширины полосы частот) (66). — 3.6.4. Потеря энергии за цикл колебаний (вибрационные испытания при резонансе) (67) — 3.6.5. Гистерезисное затухание (70)	
Глава 4. Реакция при периодических нагрузках	71
4.1. Представление нагрузки в виде рядов Фурье	71
4.2. Реакция системы при нагрузке, представляемой рядами Фурье	72
4.3. Экспоненциальная (комплексная) форма решения при воздействии в виде рядов Фурье	75
Глава 5. Реакция при импульсивных нагрузках	77
5.1. Природа импульсивных нагрузок	77
5.2. Синусоидальный импульс	77
5.3. Прямоугольный импульс	80
5.4. Треугольный импульс	81
5.5. Спектры реакции при импульсивных воздействиях	81
5.6. Приближенный метод анализа реакции при импульсивных нагрузках	84
Глава 6. Реакция при динамической нагрузке общего вида	86
6.1. Интеграл Дюамеля для системы без затухания	86
6.2. Численное определение интеграла Дюамеля для системы без затухания	87
6.3. Реакция систем с учетом затухания	91
6.4. Частотный анализ реакции систем	95
6.5. Численные методы частотного анализа	98
6.5.1. Дискретные преобразования Фурье (98). — 6.5.2. Быстрое преобразование Фурье (99)	
Глава 7. Анализ нелинейной реакции сооружений	101
7.1. Методика анализа	101
7.2. Уравнения равновесия в приращениях	102
7.3. Шаговое интегрирование	104
7.4. Общая последовательность методики вычислений	105
Глава 8. Анализ параметров колебаний методом Релея	110
8.1. Сущность метода	110
8.2. Приближенный анализ произвольной системы	111
8.3. Выбор формы колебаний	113
8.4. Усовершенствованный метод Релея	117
ЧАСТЬ II. СИСТЕМЫ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ	
Глава 9. Вывод уравнений движения системы со многими степенями свободы	121
9.1. Выбор числа степеней свободы	121
9.2. Условия динамического равновесия	122
9.3. Влияние осевых нагрузок	125

Глава 10. Определение матриц динамических параметров	126
10.1. Характеристики упругости	126
10.1.1. Податливость (126). — 10.1.2. Жесткость (127). — 10.1.3. Основные принципы расчета конструкций (128). — 10.1.4. Жесткость конечного элемента (130)	
10.2. Инерционные характеристики	134
10.2.1. Матрица сосредоточенных масс (134). — 10.2.2. Матрица распределенных масс (135).	
10.3. Характеристики затухания	138
10.4. Внешние нагрузки	138
10.4.1. Равнодействующие статических сил (138). — 10.4.2. Приведенные узловые нагрузки (139).	
10.5. Геометрическая жесткость	140
10.5.1. Линейная аппроксимация (140). — 10.5.2. Приведенная геометрическая жесткость (142).	
10.6. Выбор формы записи динамических характеристик	144
Глава 11. Свободные колебания без учета затухания	146
11.1. Анализ частот собственных колебаний	146
11.2. Анализ форм собственных колебаний	148
11.3. Анализ частот и форм собственных колебаний в терминах единичных перемещений	151
11.4. Влияние осевых сил	152
11.4.1. Собственные колебания (152). — 11.4.2. Критическая нагрузка (152). 11.4.3. Потеря устойчивости при гармоническом возмущении (153).	
11.5. Условия ортогональности	154
11.5.1. Основные условия (154). — 11.5.2. Дополнительные соотношения (156). — 11.5.3. Нормирование (157).	
Глава 12. Анализ динамической реакции	158
12.1. Нормальные координаты	158
12.2. Несвязанные уравнения колебаний (без учета затухания)	160
12.3. Несвязанные уравнения колебаний (с учетом затухания)	161
12.3.1. Вывод уравнений равновесия (161). — 12.3.2. — Условия ортогональности сил затухания (162). — 12.3.3. Взаимосвязь параметров затухания (166).	
12.4. Последовательность метода сложения форм колебаний	167
Глава 13. Практические методы анализа колебаний сооружений	174
13.1. Предварительные замечания	174
13.2. Метод Стодольи	174
13.2.1. Анализ основной формы колебаний (175). — 13.2.2. Доказательство сходимости (178). — 13.2.3. Анализ второй формы колебаний (180). — 13.2.4. Анализ третьей и последующих форм колебаний (183). — 13.2.5. Анализ высшей формы колебаний (185).	
13.3. Анализ устойчивости методом итерации матриц	187
13.4. Метод Хольцера	190

13.4.1. Основы метода (190). — 13.4.2. Метод передаточной матрицы (194). — 13.4.3. Метод Хольцера — Миклестада (196).	
13.5. Уменьшение числа степеней свободы	198
13.5.1. Исходные предпосылки (198). — 13.5.2. Уменьшение числа дискретных масс (199). — 13.5.3. Метод Релея для систем в дискретных координатах (201). — 13.5.4. Метод Релея — Ритца (202).	
13.6. Основные принципы итерации матриц	206
13.6.1. Расширение собственных значений динамической матрицы (206). — 13.6.2. Итерационное решение задачи о собственных значениях (208). — 13.6.3. Итерация со сдвигом в системе координат (211). — 13.6.4. Итерация подпространства (214).	
13.7. Симметричная форма динамической матрицы	216
13.7.1. Диагональная матрица масс (217). — 13.7.2. Матрица приведенных масс (217).	
13.8. Анализ свободных систем (не имеющих связей)	218
Глава 14. Анализ неупругих систем	222
14.1. Введение	222
14.2. Уравнения равновесия в приращениях	224
14.3. Шаговый метод интегрирования — метод линейного ускорения	225
14.4. Безусловно устойчивый метод линейного ускорения	227
14.5. Применение θ -метода Вильсона 229	
Глава 15. Вариационная формулировка уравнений движения	231
15.1. Обобщенные координаты	231
15.2. Уравнения движения Лагранжа	232
15.3. Вывод общих уравнений движения	238
15.4. Ограничения и множители Лагранжа	241
ЧАСТЬ III. АНАЛИЗ СЕЙСМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ	
Глава 16. Исходные сейсмологические данные	244
16.1. Предварительные замечания	244
16.2. Сейсмичность	246
16.3. Теория упругой отдачи при землетрясениях	247
16.4. Сейсмические волны	248
16.5. Измерение параметров движения грунта	251
16.6. Выбор расчетных моделей землетрясений	258
Глава 17. Детерминированный анализ сейсмической реакции	262
17.1. Механизмы входа сейсмических воздействий	262
17.2. Поступательные возбуждения жесткого основания	264

17.2.1. Дискретные системы с одной степенью свободы (264). —	17.5.2. Влияние грунтов на параметры сейсмических колебаний (294). —
17.2.2. Обобщенные системы с одной степенью свободы (267). —	17.5.3. — Взаимодействие сооружения с грунтом. Вывод уравнений движения (298). —
17.2.3. Системы со многими степенями свободы и сосредоточенными параметрами (272). —	17.5.4. Взаимодействие сооружения с грунтом. Анализ сейсмической реакции (305).
17.2.4. Сравнение с требованиями Единого строительного кода (284). —	17.6. Анализ сейсмической реакции неупругой системы 308
17.2.5. Системы с распределенными параметрами (286).	17.6.1. Задачи нелинейного анализа (308). —
17.3. Воздействие в виде поворота основания 288	17.6.2. Методика нелинейного анализа (310). —
17.4. Многокомпонентное возбуждение основания 289	17.6.3. Характерные особенности реакции неупругой системы (311). —
17.5. Влияние свойств основания на сейсмическую реакцию 292	17.6.4. Влияние изменчивости прочностных характеристик (312). —
17.5.1. Моделирование массива фундаментного основания (292). —	17.6.5. Метод коэффициентов податливости (315).